# *קרינה גרעינית*

## **1. מטרות הניסוי:**

I. הכרת התכונות של הקרינה הגרעינית:

א. התפלגות סטטיסטית של הקרינה
ב. התפשטות הקרינה במרחב
ג. קצב ההתפרקות של מקור רדיואקטיבי וזמן מחצית חיים
ד. אינטראקציה של הקרינה הגרעינית עם חומרים שונים

II. הכרת תכונות של מונה גייגר- מילר .

א. תחומי הפעולה של מונה גייגר – מילר
ב. "זמן מת" של המונה

**ספרות:**


1. G. F. Knoll: Radiation Detection and Measurement (3rd Ed.)
עמודים: 1-12, 49-55, 65-92, 159-164, 201-219
2. I. Kaplan: Nuclear Physics
3. D. Halliday: Introductory Nuclear Physics


## 2. **רקע תיאורטי**

### **2.1 מבוא**

בשם "קרינה גרעינית" קוראים לחלקיקים הטעונים והניטראליים או הקרינה האלקטרומגנטית הנפלטים <u>מגרעין</u> האטום, עקב שינויים באנרגיה הפנימית של הגרעין. האטומים של היסודות הרדיואקטיביים מתפרקים באופן ספונטני תוך פליטת קרינה, הנקראות קרינת $\beta$ , $\alpha$ או $\gamma$ .

א. קרינת $\alpha$ מורכבת מחלקיקים, שהם למעשה גרעיני הליום המורכבים מ- 2 פרוטונים ו - 2 ניוטרונים ומטענם הוא $2e^+$.

ב. קרינת $\beta^-$ מורכבת מחלקיקים שהם למעשה אלקטרונים בעלי מטען שלילי. בקרינה זו הניוטרון בגרעין הופך לפרוטון תוך שהוא פולט אלקטרון ועוד חלקיק המכונה "אנטי נויטרינו", הנויטרינו הוא חלקיק שכמעט אינו מגיב עם חומר, ולכן כמעט שאינו ניתן לגלוי, קיומו דרוש בשל חוקי השימור.

קיימת גם קרינת $\beta^+$ שבו, בגרעין, פרוטון הופך לניוטרון תוך פליטת אנטי אלקטרון (המכונה פוזיטרון) ונויטרינו.

ג. קרינת $\gamma$ היא קרינה אלקטרומגנטית בעלת אורך גל קצר מאוד.
בקרינה זו הגרעין שאינו ברמת היסוד, נפתר מעודפי האנרגיה שלו ללא פליטת חלקיקים, פרט לפוטונים. מסמנים גרעין מעורר בכוכבית מימינו למעלה.

את פליטת הקרינה מגרעין רדיואקטיבי x ניתן לתאר ע"י הנוסחאות:
א. פליטת $\alpha$:

$$ {}^{A}_{Z}X \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}X $$

ב. פליטת $\beta$:

$$ {}^{A}_{Z}X \xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z+1}X $$

ג. פליטת פוטון ($\gamma$):

$$ {}^{A}_{Z}X^* \xrightarrow{\gamma} {}^{A}_{Z}X $$

כאשר Z = מספר אטומי, כלומר מספר הפרוטונים בגרעין.
A = מספר המסה, סכום מספר הפרוטונים והנויטרונים.
x = סימון היסוד.

אטום בעל מס' אטומי Z ומספר מסה A, עשוי גרעין המוקף בענן אלקטרונים. הגרעין טעון מטען חשמלי חיובי, Z פעמים מטען האלקטרון.
Z הוא גם מספר האלקטרונים בענן כי האטום הוא ניטרלי. האלקטרונים הם שיוצרים את הקשרים הכימיים ומכאן שאטומים בעלי אותו מספר Z הם בעלי אותן תכונות כימיות, ושייכים לאותו יסוד. כל האמור לעיל אינו מחייב את מסת הגרעין. גרעינים של אותו יסוד השונים זה מזה במסתם נקראים איזוטופים.
מסמנים איזוטופ מסוים ע"י הסמל הכימי של היסוד אליו הוא שייך, משמאלו למטה כתוב המספר האטומי Z (Z נקבע חד-חד ערכית ע"י הסמל הכימי) ומשמאלו למעלה מספר המסה A .

סימונים לדוגמה: הליום (האיזוטופ המצוי, A = 4 ) יסומן: ${}^{4}_{2}He$
הליום (האיזוטופ הקל, A = 3 ) יסומן: ${}^{3}_{2}He$

סימוני קרינות אפשריות לדוגמה:

$$\alpha : \quad {}^{238}_{92}U \rightarrow \alpha + {}^{234}_{90}Th$$

$$\beta^- : \quad {}^{234}_{90}Th \rightarrow \beta^- + {}^{234}_{91}Pa$$

$$\beta^- + \gamma : \quad {}^{60}_{27}Co^{60} \rightarrow \beta^- + {}^{60}_{28}Ni^* \rightarrow \gamma + {}^{60}_{28}Ni$$

גם הקרינה הקוסמית היא קרינה גרעינית שבאה אלינו מתוך החלל הקוסמי. בשעה שקרינה זו נכנסת לתוך האטמוספרה של כדור הארץ, היא מורכבת רובה ככולה מפרוטונים וגרעינים של היסודות הקלים. בשעת התנגשותם של חלקיקים אלה עם גרעינים שבאטמוספרה נוצרים חלקיקים חדשים, במיוחד נויטרונים, מזונים (חלקיקים בעלי מסה פי 215 או פי 280 יותר גדולה ממסת האלקטרון, שמטענם חיובי, שלילי או אפס), אלקטרונים שליליים, ואלקטרונים חיוביים (פוזיטרונים), בנוסף על כך נוצרת קרינת $\gamma$.

כדי לחקור את הקרינות לסוגיהן פותחו שיטות מדידה שונות ומכשירים שונים.
בניסוי נשתמש ב"מונה גיגר" (על שם מפתחו הראשון). גלאי זה מוציא פולס חשמלי כל פעם שחלקיק מייגן עובר דרכו.
אין אנו יודעים לחזות את הזמן בו גרעין מסוים יתפרק. לכן, יש לתאר את תופעת ההתפרקות במונחים סטטיסטיים והשוואת תוצאות המדידות לחישובים.

## 2.2 מונה גיגר -אופן הפעולה

מונה גייגר הוא מכשיר לגילוי קרינות באמצעות היינון שהן גורמות.

לב המונה הינו גליל זכוכית המצופה במוליך שהוא הקתודה (ראה איור 3) לאורך ציר הגליל נמתח תיל מתכת שהוא האנודה, המבודדת מהקירות. החלל בתוך הגליל מכיל בערך 90% גז אציל (במקרה שלנו ארגון) בלחץ נמוך, ובערך 10% אדי כהל לכיבוי ההתפרקות. (הלחצים במונה שלנו הם ~1/2At ארגון וכ- 10 טור כוהל). במעבר של חלקיק רדיואקטיבי בשפופרת, החלקיק מיינן את חלקיקי גז הארגון ויוצר יונים חיובים וכן אלקטרונים חופשיים.

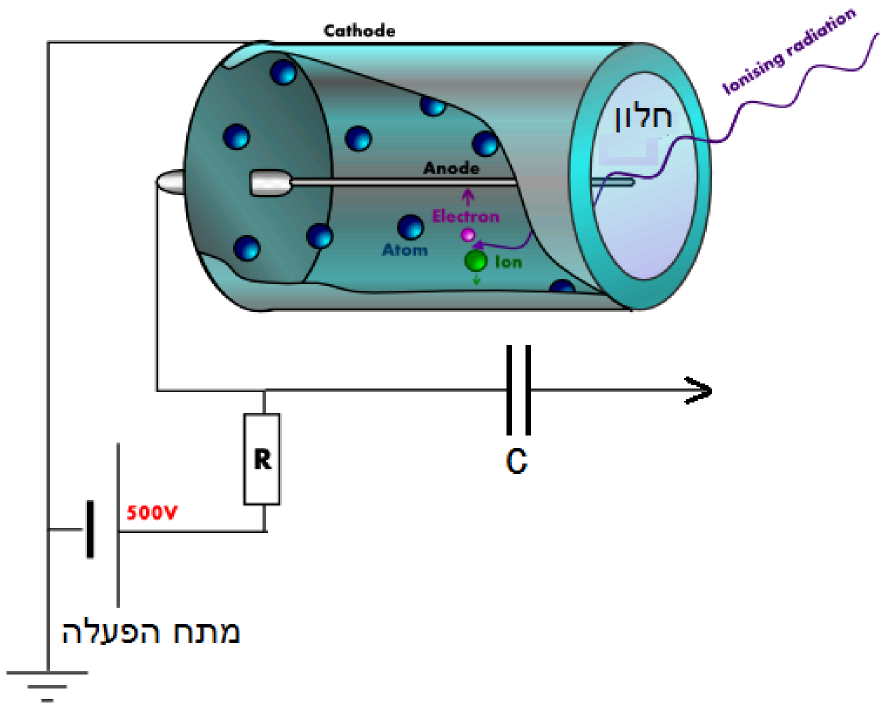
בקצה השפופרת נמצא חלון (W). כאשר קרינה החודרת דרך החלון מייננת את הגז, או גורמת לפליטת אלקטרונים מדופן המונה, האלקטרונים נעים לכיוון האנודה. ההתפתחות משלב זה והלאה תלויה חזק מאד במתח על פני השפופרת.

האלקטרונים נמשכים בקצב מהיר יותר מהיונים (זאת בשל משקלם הקטן בהרבה מזה של היונים) אל האנודה, אשר בסביבתה קיים שדה חשמלי חזק הגורם להאצת האלקטרונים. כאשר אלו מגיעים אל האנודה הם יוצרים זרם חשמלי הגורם לפליטת פולס. בדרך לאנודה מהירות האלקטרונים מואצת ומגיעה למהירות הגורמת ליינון של אטומים נוספים אשר מגבירים את הפולס בתהליך הנקרא מפולת.

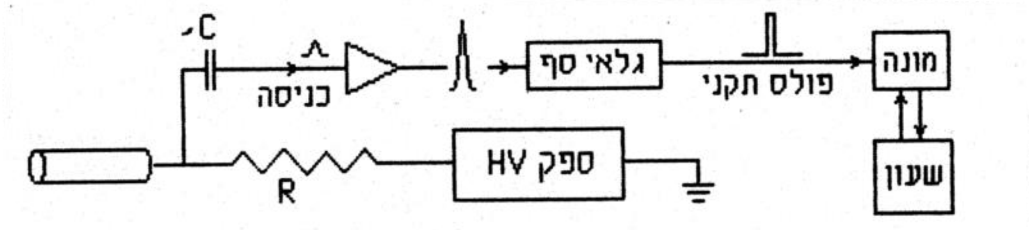
מסביב ישנו המערך אלקטרוני הכולל:

א. ספק מתח גבוה מתכוונן.
ב. מגבר כניסה לפולסים וגלאי סף.
ג. קוצב זמן.

תיאור סכמטי של המערך האלקטרוני ניתן לראות באיורים 1 ו 2.




**איור 1:** מבנה סכמטי של מונה גיגר




**איור 2** : סכמת המערכת האלקטרונית

### **2.2.1 תחומי מתח על פני השפופרת**

א. תא ינון- המתח נמוך מאד, האלקטרונים נעים אל האנודה, והיונים נעים לאט לאט אל הקתודה, המטען הנאסף שווה למספר היונים שנוצרו. בקצב קרינה קבוע הזרם החשמלי יהיה יחסי לעצמת הקרינה.

ב. מונה פרופורציוני- המתח בינוני. ליד האנודה השדה חזק מספיק כדי שהאלקטרונים ששוחררו מהגז ע"י הקרינה ייננו את הגז שוב (כמו מפולת או תגובת שרשרת) . מספר האלקטרונים המגיעים לאנודה גדול בהרבה מאלו שנוצרו ישירות ע"י הקרינה. למעשה יש בתוך השפופרת "הגבר מטען". בתנאי פעולה כאלה, מדידת מטענו של הפולס החשמלי מאפשרת למצוא את האנרגיה שהחלקיק המיינן השאיר במונה, ואם הוא נעצר במונה, נדע את האנרגיה שהייתה לו. המצב דומה גם בפעולה כתא ינון, אבל כמות המטען בכל פולס כה קטנה, שכמעט אי אפשר להצליח במדידת מטענו של פולס בודד.

ג. מונה גיגר- המתח גבוה. האלקטרונים ליד האנודה מתרבים מאד והשדה החזק אוסף אותם אליה. עם הגעת האלקטרונים לאנודה, נשארים מאחוריהם היונים, שהם כבדים ואיטיים. המטען החיובי של היונים יוצר שדה כאילו יש אנודה "נפוחה", עקמומיות המשטח הטעון יורדת ואיתה השדה. תהליך זה הוא בעל היזון חוזר שלילי, ז"א היינון נמשך עד שהשדה החשמלי נחלש מספיק למניעת ינון נוסף. התוצאה הישירה היא פולס ענק, שאינו תלוי כלל במספר האלקטרונים שהתחילו אותו, אפילו אלקטרון בודד מספיק ליצירת פולס חשמלי זה, אבל אחד לפחות הכרחי !
במתח כזה, מספר הפולסים שימנו אינו תלוי במתח, ולכן מספיקה מערכת אלקטרונית פשוטה. מאידך במצב גיגר אין אפשרות, מתוך אופי הפולס החשמלי, לדעת מהי אנרגית הקרינה.

ד. במתחים גבוהים, אטומים, המעוררים בזמן פולס אחד, יכולים ע"י פליטת פוטון ב- UV לגרום לפולס נוסף, ועם עליית המתח זה עלול להפוך להתפרקות רצופה. התפרקות זו תהרוס את המונה, (לכן בונים את ספק המתח עם התנגדות יציאה גבוהה מספיק כדי להגביל את הזרם אל מתחת לסף ההרס). מוסיפים לגז אדי כהל כדי לאפשר לאטומים מעוררים לעבור לרמת היסוד תוך התנגשות עם מולקולות הכוהל. בהתנגשות כזאת יכולה אנרגית העירור האלקטרונית להפוך לאנרגית תנועה

אטומית, בתוך המולקולה המסובכת של הכוהל (תנועה אטומית אינה יכולה להשתחרר כפוטון UV אלא רק IR).

כל פולס משאיר אחריו יונים בחלל, ומתח מופחת על פני השפופרת (למשך הזמן RC). שתי תופעות אלו גורמות שהמונה, מיד לאחר פולס, לא יוכל לפעול. למשך זמן זה קוראים "זמן מת". לקראת סוף הזמן המת, קרינה תצליח ליצור פולס חשמלי, אבל הוא יהיה קטן מהרגיל. תופעה זו נקראת "החלמה". פולס חשמלי, בכניסה לאלקטרוניקה, חייב להיות גדול מסף מסוים כדי "שיחשב" לפולס. שנוי בגובה סף זה יקבע איזה חלק מזמן ההחלמה נחשב זמן מת ואיזה חלק נחשב חי.

## 2.3 התפשטות הקרינה במרחב ומדידת המרחק האפקטיבי

הנחת היסוד של ניסוי זה הוא קיומו של שימור שטף של קרינה במרחב. במקרה של מקור קרינה נקודתי, אין עדיפות לכיוון זה או אחר במרחב, לכן תפוזר הקרינה לכל המרחב באופן שווה.

כידוע, שטח פני כדור הינו $4\pi R^2$, כך שאם נפלט ממקור נקודתי $N_0$ חלקיקים עבור זמן נתון- מספר החלקיקים שיפגע ביחידת שטח אחת במרחק R ממקור זה הינה:

$$\frac{N_0}{4\pi R^2} \tag{1}$$

במקרה שמדובר בגלאי אשר מודד את מספר החלקיקים הפוגעים בו יש לקחת בחשבון גם את שטח הגלאי $S$ וגם את יעילות הגלאי (אחוז החלקיקים שהגלאי מצליח לקרוא מתוך החלקיקים הפוגעים)- $\eta$. כאשר לוקחים את שני הפרמטרים הללו בחשבון מקבלים כי מספר החלקיקים הנקלטים בגלאי הינם:

$$\frac{\eta \cdot S \cdot N_0}{4\pi R^2} \tag{2}$$

נגדיר את אוסף הקבועים: $\frac{\eta \cdot S \cdot N_0}{4\pi} \equiv c$ , כך שניתן להציג את מספר הקריאות שקורא הגלאי כפונקציה של R:

$$n = \frac{c}{R^2} \tag{3}$$

כאשר $n$ מציין את מספר המניות.

נוסחא (3) מתייחסת למצב שבו הוזנחה הבליעה של חלקיקי האוויר שבין המקור לגלאי, זאת משום שבליעה זו אינה משמעותית יחסית לבליעה בחומרים אותם מודדים ולכן אינה משפיעה בצורה מוחשית על תוצאות הניסוי. כמו כן בנוסחא (3) אין התייחסות למרחק שעוברת הקרינה בתוך הגלאי, אשר יסומן ב- $R_0$, מרחק זה משמעותי בעיקר כאשר מודבר במרחקים קטנים (כמו בניסוי זה), ולכן יש להכלילו בניסוי. נציב בנוסחא (3) ונקבל :

$$n = \frac{c}{\left(R + R_0\right)^2} \qquad (4)$$

כאשר $R_0$ המרחק האפקטיבי.

## 2.4 בליעה של קרינה רדיואקטיבית בחומר

אטומים מיוננים כגון חלקיקי α או מימן מיונן מפסידים מהאנרגיה שלהם בעוברם בתוך חומר ע"י ינון ועירור אטומי התווך, עד שהם נעצרים. מסלולם הוא כמעט קו ישר. ניתן לחשב את הקשר בין הטווח והאנרגיה ההתחלתית שלהם.

לא כך המצב לגבי קרינות β האלקטרונים מתווים מסלול מסובך מאוד בתוך התווך עד שהם נעצרים. לאלקטרונים אפשרויות אינטראקציה רבות עם התווך. העיקריות הן פיזור אלסטי יוניזציה והפסדי קרינה. פוטונים נעים בקו ישר עם מעט מאוד פיזורים לצדדים. הם מפסידים אנרגיה בעיקר ע"י שלוש האינטראקציות הבאות:
פיזור ע"י אלקטרונים (פיזור קומפטון), אפקט פוטואלקטרי ויצירת זוג אלקטרון פוזיטרון. למרות שתהליכים אלו מסבכים את מסלול הפוטונים, ניתן לדבר על טווח ממוצע $R$ של קרינות γ בתוך החומר. עבור דרך קצרה מאוד $dx$ הסיכוי שפוטון ייעצר הוא μdx כאשר $\mu$ הוא מקדם הפרופורציה המתאים. אם בנקודה x היו $N_x$ חלקיקים:

$$dN_x = -\mu\, dx\, N_x \qquad (5)$$

כאשר הסימן - מורה על ירידת מספר החלקיקים לאורך הדרך. מכאן נקבל:

$$N_x = N_o\, e^{-\mu x} \qquad (6)$$

$\mu_{(cm^{-1})}$ נקרא מקדם הבליעה.

המהלך הממוצע $R$ מוגדר ע"י תוחלת מנורמלת למספר החלקיקים :

$$R = \frac{\int_0^\infty x\, dN_x}{\int_0^\infty dN_x} = \frac{\int_0^\infty x\, e^{-\mu x}\, dx}{\int_0^\infty e^{-\mu x}\, dx} = \frac{(1/\mu)^2}{1/\mu} = 1/\mu \qquad (7)$$

כי :
$$dN_x = -\mu N_o e^{-\mu x} dx \qquad (8)$$

לכן הטווח או המהלך הממוצע הוא : $R = 1/\mu$.

## 2.5 קצב ההתפרקות של מקור רדיואקטיבי וזמן מחצית החיים

אם בזמן מסוים $t$ במקור $N$ אטומים, ובהנחה ש $N$ גדול מאוד ויש תוחלת שיתפרקו מהם $m$ בזמן $\Delta t$ נקבל שינוי $dN$ ב- $N$ במשך אותו זמן. $\Delta N = -m$

הסיכוי לאטום מסוים להתפרק בפרק זמן זה הוא : $p = \frac{m}{N}$ כי כל האטומים זהים.

ומכאן הסיכוי של אטום להתפרק במשך זמן $dt$ הוא $p\,\frac{dt}{\Delta t}$ בתנאי ש $dt$ מספיק קטן.

$\lambda = \frac{p}{\Delta t}$ הוא הסיכוי ליחידת זמן של אטום להתפרק. שים לב שזו תכונה של האטום הבודד, אם כי הערך המספרי ניתן למדידה רק על אוסף גדול של אטומים.

ע"י הצבה נקבל שמשוואה לשינוי $N$ היא :

$$dN = -\lambda\, N\, dt \qquad (9)$$

שפתרונה הוא :

$$N = N_o\, e^{-\lambda t} \qquad (10)$$

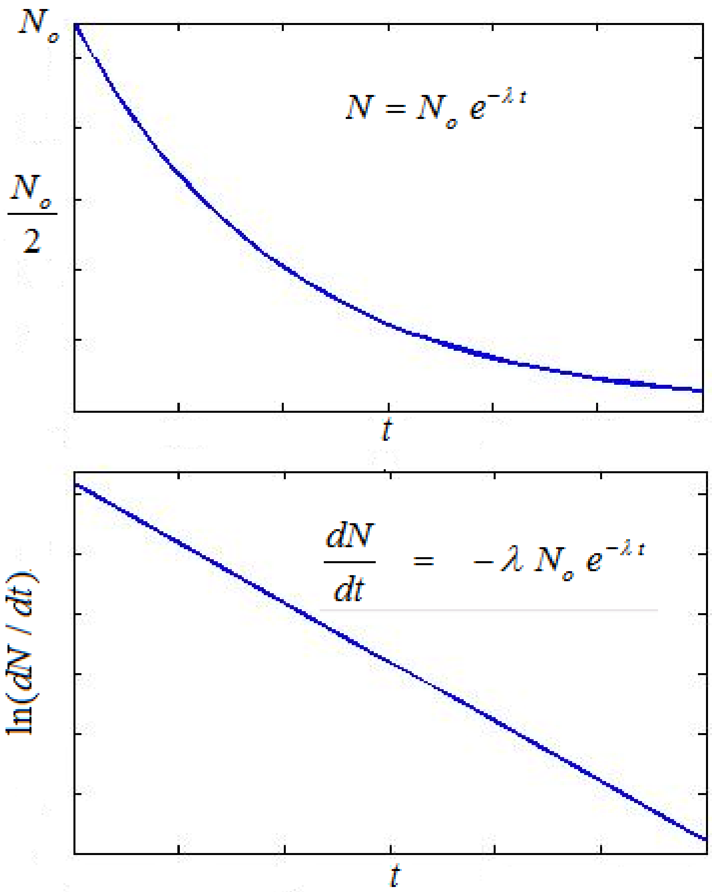
כאשר : $N_o$ הוא מספר האטומים בזמן $t = 0$ שעדיין לא התפרקו.

ממשוואה (10) נובע כי, מספר האטומים שעדיין לא התפרקו הולך וקטן עם הזמן באופן מעריכי. הנגזרת $dN/dt$ מבטאת את עוצמת הקרינה. אם נגזור את משוואה (10) לפי $t$ נקבל את הנוסחה הבאה לעוצמת הקרינה :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N_o\, e^{-\lambda t} \qquad (11)$$

מכאן שגם עוצמת הקרינה, הולכת וקטנה עם הזמן באופן אקספוננציאלי.

הגרף המתאר את $N$ שבמשוואה (10) כפונקציה של הזמן נתון בגרף העליון באיור 3.




**איור 3:** תיאור של $N$ כפונקציה של הזמן (גרף עליון), תיאור של $\ln(dN/dt)$ כפונקציה של הזמן (גרף תחתון).

נחשב את הזמן הדרוש לחצי ממספר הגרעינים הלא מפורקים ב $t = 0$ להתפרק.

זמן זה נקרא בשם זמן מחצית החיים של החומר, ומסומן ב $t_{1/2}$ לפי משוואה (10).

$$\frac{N_o}{2} = N_o\, e^{-\lambda t_{1/2}} \qquad (12)$$

ולכן :

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda\, t_{1/2}}$$

$$\ln\left(1/2\right) = -\lambda\, t_{1/2}$$

$$t_{1/2} \quad = \quad \frac{\ln\left(2\right)}{\lambda} \qquad (13)$$

בגרף התחתון באיור 3 מתואר גרף של לוגריתמוס עוצמת הקרינה *ln (dN/dt)* כפונקציה של הזמן.

גרף זה הוא קו ישר שמשוואתו :

$$\ln \frac{dN}{dt} \quad = \quad -\lambda\, t \quad + \quad \ln \lambda\, N_o \qquad (14)$$

מתוך שיפוע קו זה ניתן לחשב את λ ולפי משוואה (13) ניתן לחשב את זמן מחצית החיים של היסוד.

## 2.6 הטיפול הסטטיסטי

נשאיר את הדיון הסטטיסטי והשיטה למציאת החוקים הסטטיסטיים לנספחים ונסכם את התוצאות העיקריות :

1. אי אפשר לחזות מראש מתי גרעין מסוים יתפרק .
2. במקרה בו מתפרקים בפרק זמן נתון (וקצר) __בממוצע__ m גרעינים, הסיכוי שמספר הגרעינים המתפרקים הוא k ניתן ע"י p (m,k) (התפלגות פואסון),כאשר :

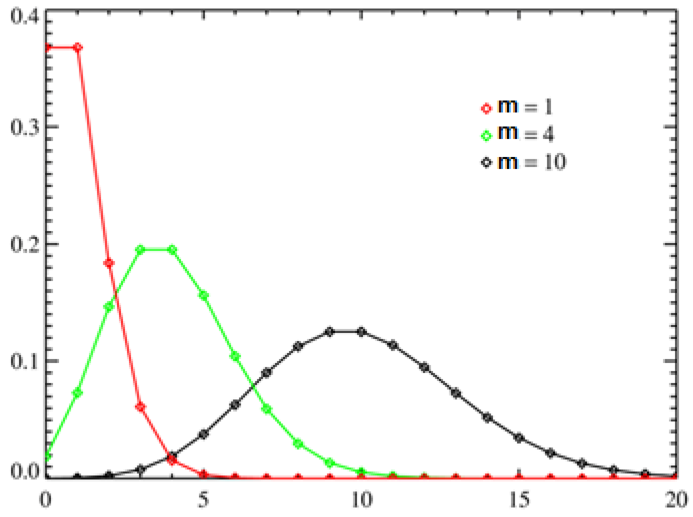
$$p(m,k) = \frac{m^k e^{-m}}{k!} \qquad (15)$$

3. ערך התוחלת של k הוא m.
4. אם במדידה בודדת נמצאו k התפרקויות, ערך התוחלת של m הוא : k + 1 .
5. אי הוודאות של k היא : $\sqrt{m}$
6. אי הוודאות של m לאחר מניה בודדת הוא : $\sqrt{k+1}$
7. כאשר m >> 1 וגם (m – k) << m הפילוג נעשה גאוסי :

(16) $$P_{(m,k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left(\frac{-(k-m)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

כאשר $\sigma$ היא השונות ולפי סעיף 5 $\sigma=\sqrt{m}$ .

באיור (4) מתוארת התפלגות פואסון עבור ממוצעים שונים (ניתן לראות שעבור m גדול הפילוג נעשה גאוסי) .




**איור 4** : התפלגות פואסון עבור ממוצעים שונים

## **2.7 הזמן המת של המונה**

הבעיה החמורה ביותר ביצירת מוני גייגר היא בעיית הכיבוי המהיר של ההתפרקות אחרי מעבר החלקיק. ברור שבמשך ההתפרקות הנגרמת על ידי מעבר חלקיק אחד המונה לא יוכל לספור חלקיק אחר העובר דרכו. לזמן זה קוראים "הזמן המת" (DEAD TIME) נתעניין רק בתחום גייגר.

סיום ההתפרקות תלוי בגורמים הבאים:

א. <u>צורה גיאומטרית</u>: בגלל הסידור הגלילי של המונה, עוצמת השדה החשמלי חזקה ביותר בסביבת החוט המרכזי. כשהאלקטרונים המשוחררים על ידי החלקיק החיצוני מגיעים לסביבת החוט הם יוצרים, על ידי התנגשות, זוגות חדשים. האלקטרונים שהופיעו בהיותם קלים יותר, זזים מהר ממקומם אבל היונים החדשים, נשארים זמן רב יותר בסביבת האנודה, ומסככים אותה בסכוך של מטען חיובי. דבר זה מקטין בהרבה את עוצמת השדה החשמלי בתוך המונה.

ב. כיבוי חיצוני: הזרם הגדול יחסית הזורם במשך המפולת גורם לנפילת מתח ניכרת RI על פני הנגד החיצוני R המתח הנשאר על פני המונה יקטן אפוא ויגיע לערך בלתי מספיק לשם החזקת ההתפרקות.

ג. כיבוי פנימי: חוץ מינון גורמים האלקטרונים גם לערור אטומים של ארגון וכתוצאה מכך לפליטת פוטונים שרובם בתחום האולטרא סגול. פוטונים אלו פוגעים בדופן הקתודה וגורמים לשחרור אלקטרונים (אפקט פוטואלקטרי) המשתתפים בהתפרקות. תפקידם של מולקולות הכוהל שהוכנסו למונה הוא לבלוע את הפוטונים ובכך להקטין את הזמן המת של המונה.

**מדידת ה"זמן המת":**

במידה ולמקור מסוים יש קצב התפרקות $r_0$ ולמונה זמן מת $\tau$, קצב הספירה לא יהיה $r_0$ אלא r כלומר במשך שנייה הוא הופעל r פעמים. לאחר כל מניה הוא מת לזמן $\tau$ ולכן מתוך כל שנייה לא היה פעיל במשך $r\tau$ ופעל במשך זמן $1-r\tau$ לכן שינוי קטן בקצב האמיתי $dr_0$ יגרום לשינוי קצב ספירת המונה רק ב- $(1-r\tau)dr_0$.

ולכן:

$$dr=(1-r\tau)dr_0 \tag{17}$$

$$\frac{dr}{1-r\tau}=dr_0 \tag{18}$$

נבצע אינטגרציה של נוסחה (15):

$$-\frac{1}{\tau}\ln(1-r\tau)=r_0 \tag{19}$$

$$1-r\tau=e^{-r_0\tau} \tag{20}$$

נשים לב כי עבור קצב נמוך כלומר: $r_0<<\frac{1}{\tau}$ המונה יכול לעקוב אחרי הקצב האמיתי ונקבל:

$$1-r\tau\sim 1-r_0\tau \tag{21}$$

לעומת זאת אם הקצב גבוה, המונה יתחיל לפגר אחרי הקצב האמיתי ועבור $r_0 >> \frac{1}{\tau}$ נקבל מ- (20):

$$1 - r\tau \sim 0 \qquad (22)$$

כלומר, קצב הספירה המכסימלי של המונה הוא $r = \frac{1}{\tau}$.

את הזמן המת של המונה ניתן לקבוע כך:

לוקחים שני מקורות, אחד בעל קצב $r_{0A}$ והשני בעל קצב $r_{0B}$ ונבצע שלושה מדידות.

A לחוד -המונה ירשום קצב $r_A$.

B לחוד -המונה ירשום קצב $r_B$.

ולבסוף עם שני המקורות ביחד והמונה ירשום קצב $r_{(A+B)}$.

$$\begin{aligned} 1 - r_A\tau &= e^{-r_{0A}\tau} \\ 1 - r_B\tau &= e^{-r_{0B}\tau} \\ 1 - r_{(A+B)}\tau &= e^{-(r_{0A}+r_{0B})\tau} \end{aligned} \qquad (23\text{-}25)$$

מתוך הנוסחאות 23-25 אפשר לחשב את הזמן המת $\tau$.

$$\tau = \frac{r_A + r_B - r_{(A+B)}}{r_A \cdot r_B} \qquad (26)$$

אפשר למדוד את $\tau$ גם בדרך אחרת.

נפעיל את המונה בקצב מספיק גבוה של מניה, ונשלח את האות לאוסצילוסקופ. במשך זמן סריקת המסך יופיעו מספר פולסים. אם הסריקה מופעלת ע״י פולס, יראה הפולס הראשון בסריקה נח. לאחריו יהיה מרווח חסר פולסים. אורך מרווח זה הוא הזמן המת.

## 3. הקרינה מהמקורות במעבדה

א. כל כמות של קרינה מזיקה. אין סף תחתון לנזק, הנזק (ברמות קרינה נמוכות) נקבע ע"י האינטגרל על הזמן.

ב. מקובל להסתכן בקרינה עד אחוזים אחדים מקרינת הרקע הקיימת תמיד בטבע (בעיקר קרינה קוסמית וקרינה מאשלגן שהוא יסוד טבעי בגוף).

ג. קרינה נמדדת ביחידה הנקראת רם (R E M).

ד. רמת הקרינה הטבעית היא כ- 10 מיקרו רם לשעה. כל מקור במעבדה קורן פחות מ- 10 מיקרו רם לשעה במרחק מטר.

ה. החזקת מקור ביד תגרום ביד לקרינה ברמה של עד 10 מילירם לשעה. אולם היד רגישה לקרינה פי 10 פחות מרוב אברי הגוף.

ו. האיברים הרגישים במיוחד הם העיניים ואברי המין. יותר מכל רגישים לקרינה עוברים צעירים.

ז. הקרינה במעבדה אינה מסוכנת כי רק אחוז זעיר מזמן חייו מבלה הסטודנט במעבדה, על יד המקורות.

ח. למרות האמור לעיל סטודנטית הרה מתבקשת לדחות את ביצוע הניסוי.

**<u>א ז ה ר ה !</u>**

1. אל תפעיל המכשיר ללא אישור המדריך. אם המכשיר פועל אל תיגע במונה גייגר מילר. אל תנסה לבדוק חיבורים בעת פעולת המכשיר.

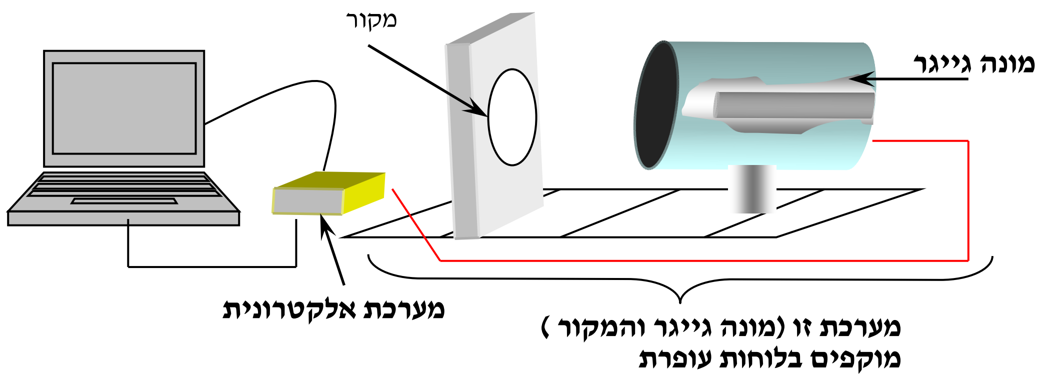
2. אין לפתוח את הקופסה של החומרים הרדיואקטיביים. יש להחזיק בקופסה מן הצד ולא לגלות את הראש מעל המקורות.

3. קריאות המכשיר מדויקות רק במידה ונתת לו שהות להתייצב סביב לנקודה המסוימת לכן עם כל שינוי מתח יש לחכות להתייצבות

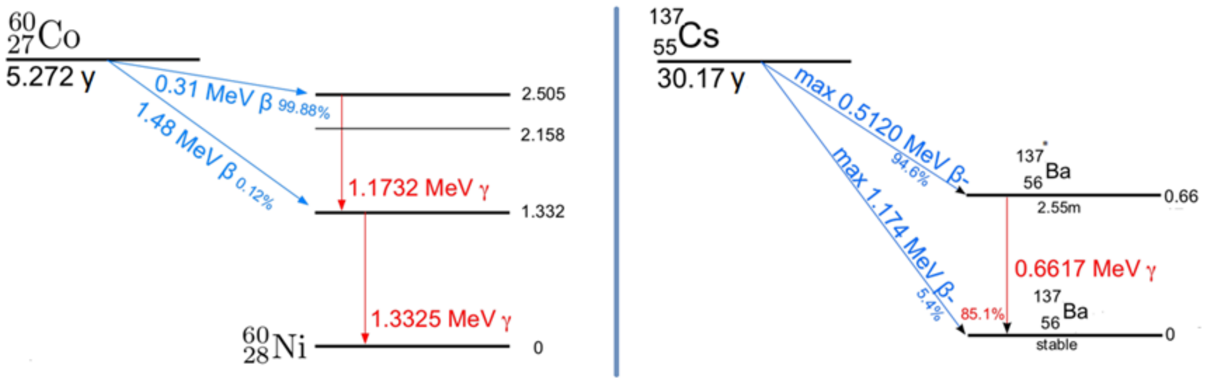
## 4. מהלך הניסוי

מערכת הניסוי מתוארת באיור 5. נעזר ביסוד הרדיואקטיבי מסוג צזיום $^{137}_{55}Cs$. המקורות פולטים חלקיק $\beta$ ולאחריו פוטון של קרינת $\gamma$, בנוסף למקורות יש אותה עוצמת קרינה ( עוצמת קרינה של $\sim 10\mu Ci$, מקור רדיואקטיבי שחלות בו $3.7\cdot 10^{10}$ התפרקויות בשנייה, הוא בעל עוצמה של 1 קירי (CURIE)).

כפי שניתן לראות בתרשים 6 הקובלט פולט פוטונים בעלי אנרגיות של $1.17_{Mev}$ ו- $1.33_{Mev}$ והצזיום פולט פוטון בעל אנרגיה של $0.66_{Mev}$ (זמני החיים לפליטת ה- $\gamma$ הם $\sim 10^{-6} - 10^{-18}$ שניות)



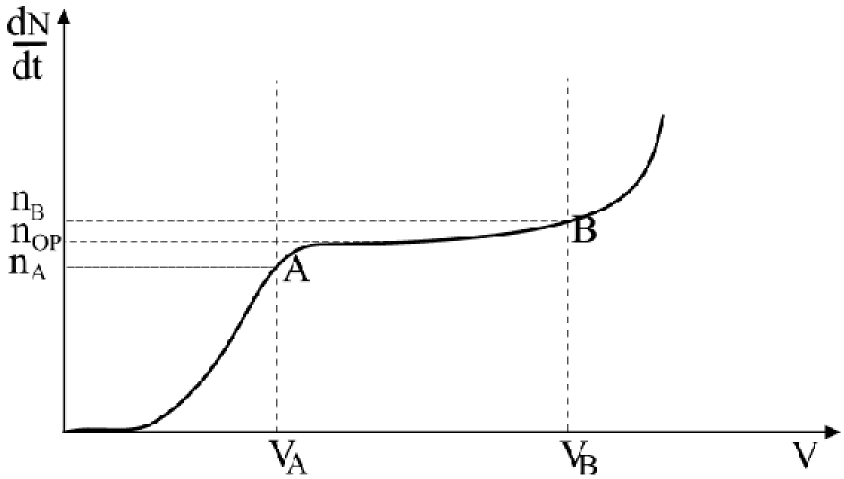

**איור 5** : מערכת הניסוי




**איור 6** : סכמת רמות ואנרגיה של חלקיקים נפלטים

## 4.1 מציאת מתח הפעלה

לפני שנוכל להשתמש במערכת, יש למצוא את מתח ההפעלה. השיטה הנכונה לעשות זאת היא לקרוא את הוראות ההפעלה. אבל בניסוי שלנו אנו לומדים את על השפופרת ולכן במעבדה זו נמצא בעצמנו את מתח ההפעלה. לשם כך נפעיל את המונה במתחים שונים, כאשר הוא נמצא בשדה קרינה קבוע. נקרא את מספר המניות שהוא מראה, **ונברר מהו תחום המתחים שבו קצב המניות אינו תלוי במתח**. עליו נבחר את "נקודת העבודה", שבה, ובסביבתה, התלות הקצב במתח מזערית. באיור 7 ניתן לראות גרפים המתארים את תלות של קצב המניות במתח. נסביר את האזורים השונים.




**איור 7**: תיאורים של קצב המניה בתלות במתח, המונה נמצא בשדה קרינה קבוע.

<u>קביעת המונה בתחום המישור (PLATEAU)</u>

כאשר מפעילים מונה גייגר על-ידי מקור רדיואקטיבי ומעלים בהדרגה את המתח, עד מתח הסף לא יבואו כלל אותות (המונה יפעל כמונה פרופורציוני, אולם אותותיו יהיו קטנים בערך פי 1000 מאלה הבאים בתחום גייגר, כך שלרוב לא נרגיש בהם) ואילו מעל הסף קיים תחום רחב, בו קצב מניה (לדקה למשל) קבוע בקירוב. תחום זה נקרא "מישר" Plateau (איור 7).

איור 7 מראה דוגמת גרף של מספר המניות בדקה, הנגרם על-ידי עוצמת קרינה קבועה, כפונקציה של המתח על המונה. במתחים הגבוהים מערך מסוים $(v_A)$מתחילות להירשם מניות ובתחום $v_B - v_A$ משתנה מספר המניות בדקה רק במידה קטנה. כאשר המתח עולה יותר מדי, מקבלים יותר מניות מאשר מספר

החלקיקים העוברים דרך המונה. הסיבה היא שמעל למיישר יורדת יעילות הכיבוי הפנימי וכל אות גורם לאותות נוספים.

**מציאת נקודת עבודה:**

הלשונית "מתח עבודה" שבתוכנה מאפשרת לבצע מספר של מדידות רצופות כאשר בכל מדידה מתח ההפעלה של המונה משתנה. את תחום המדידה הרצוי בוחרים לפי "מתח התחלתי" ו"מתח סופי" ואת ההפרשים לפי "הפרש בין מדידות". שימו לב שהמונה מסוגל לעבוד בתחום של 0-600 וולט בלבד.

- בצע מדידות לפי הבנתך וזהה את התחום $V_B - V_A$, מתוך תחום זה בחר מתח הפעלה מתאים שעמו תעבוד במהלך הניסוי.
- הצג את התוצאות בגרף.

**מדידת קרינת הרקע:**

הקרינה הקוסמית והחומרים הרדיואקטיביים על פני האדמה שולחים חלקיקים טעונים וקרינת $\gamma$ לכל הכיוונים. לכן, אפילו אם אין מקור קרינה בסביבת המונה, נקבל קרינה רדיואקטיבית, ולכן כדי לקבל תוצאות נכונות צריך תמיד להסיר את ה"רקע" של הקרינה המלווה המפריעה.

- בחר בלשונית "מדידת קרינה" וקבע את מתח ההפעלה שחישבת . הרחק את כל המקורות הקורנים מהמונה ומנה במשך דקה את קרינת הרקע. בהמשך הניסוי יש להחסיר את תרומת הרקע מהקריאה המתקבלת.

## 4.2 התפשטות הקרינה במרחב

בשלב זה נבדוק את תלות מספר המניות במרחק המקור מהגלאי. כפי שהוסבר בסעיף 2.3 בתאוריה קשר מרחק זה למספר המניות נתון לפי:

$$I = \frac{C}{\left(r + R_0\right)^2} \qquad (27)$$

כאשר $r$ הוא מרחק המקור מהגלאי ו- $R_0$ המרחק האפקטיבי בתוך הגלאי.

בחר בתוכנה בלשונית "מדידת קרינה", כעת ניתן לקבוע את זמן המדידה ומספר המדידות (חיוני לצורך חישוב השונות).

- בצע מדידות של קרינת גמא במרחקים שונים על פי הבנתך על מנת שתוכל לבחון את נוסחה (27).
- ערוך גרף של התוצאות והתאם את נוסחא (27) לתוצאות המדידה.
- חשב את $R_0$.
- חזור על הניסוי עבור קרינת בטא. השווה בין התוצאות עבור $R_0$.
- בצעי דיון בתוצאות.

## 4.3 מציאת מקדמי בליעה של חומרים שונים

המטרה של שלב זה הוא למצוא את מקדמי הבליעה של החומרים אלומיניום ועופרת. כפי שהוסבר בתאוריה קיים הקשר :

$$N_x = N_o e^{-\mu x} \qquad (28)$$

$\mu_{(cm^{-1})}$ נקרא מקדם הבליעה של החוצץ.

$x$ - עובי החוצץ.

c- מספר המניות ללא חוצץ.

$Nx$ - מספר המניות עם החוצץ

- עבור כל אחד מהחומרים בצעו מדידות כך שתוכלו לחשב את מקדם הבליעה שלהם. באפשרותכם להניח מספר חוצצים כרצונכם בין המקור לגלאי ולשנות את מספרם בין מדידה למדידה, הקפידו שגם עבור המדידה החלשה ביותר (עם מספר החוצצים הרב ביותר) יתקבלו מספר מניות מספק.

### עיבוד תוצאות

1. ערכו גרפים מתאימים וחשבו את מקדמי הבליעה שונים.
2. בצעו דיון בתוצאות.

### 4.3.1 **מציאת מקדם בליעה של קרינת** $\beta$ ב Polyethylene

פנה למדריך על מנת שיראה לכם את המערכת שבה יש לעבוד לצורך מדידת קרינת $\beta$ (למערכות הרגילות ישנו כיסוי שמונע כניסת קרינת $\beta$) ואת סט חוצצי ה Polyethylene בעוביים שונים.

היסוד צזיום פולט קרינת $\beta$ ו $\gamma$, באחד הצדדים של המקור ישנה מדבקה שחוסמת את קרינת ה $\beta$ כך שמצד אחד נפלט קרינת $\gamma$ בלבד ומצד שני (ללא המדבקה) קרינת $\beta$ ו $\gamma$.

בשלב ראשון, כדי להעריך את הקריאה המתקבלת מקרינת $\gamma$ מתוך כלל הקריאות, בצעו שתי מדידות כאשר כל פעם צד אחר של המקור יופנה לגלאי , על המקור להיות במרחק של כ-2-4 ס"מ מהגלאי כדי שקרינת ה $\beta$ לא תונחת במידה רבה.

**מה היחס בין קרינת $\beta$ ל $\gamma$ שמתקבלת מהצד ללא המדבקה של המקור ?**

הנח את אחד החוצצים על המונה גייגר ובצע מדידה, חזור על התהליך עבור החוצצים השונים ורשום את עוביים (לפי הנתונים בקופסה).

**עיבוד תוצאות**

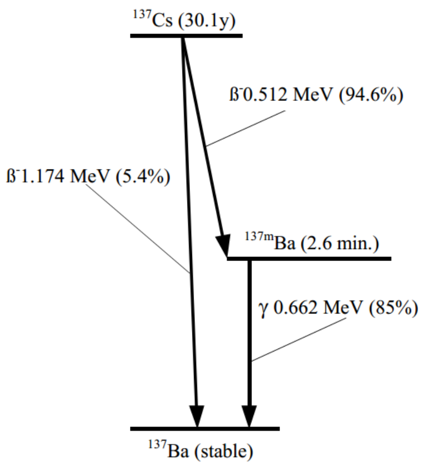
1. ערכו גרף מתאים וחשבו את מקדם הבליעה.
2. ההנחה בניסוי שקרינת $\gamma$ לא מונחתת עקב המדבקה או הPolyethylene , הסבר עד כמה הנחה זו מדויקת והיכן אי-הדיוק בא לידי ביטוי בתוצאות.
3. בצעו דיון בתוצאות.

### 4.4 **מציאת זמן מחצית החיים של האיזוטופ** $^{137}Ba$

את תהליך הפליטה של הצזיום ניתן לרשום כך :

$$^{137}_{55}Cs \rightarrow {}^{137}_{56}Ba^{*} \xrightarrow{\gamma} {}^{137}_{56}Ba$$

סכמת הדעיכה של החומר נתונה בתרשים 8. ניתן לראות כי בתהליך הצזיום עובר שלב ביניים של בריום הפולט קרינת גמא עד הגיעו למצב היציב. באופן ישיר לא ניתן להפריד את קרינת הבריום שזמן מחצית החיים שלה הוא 2.6 דקות מתוך התהליך כולו ולא ניתן למדוד את זמן מחצית החיים של הבריום בנוכחותו של הצזיום.




**איור 8** : סכמת הדעיכה ואנרגיה של חלקיקים נפלטים

על מנת למדוד את זמן מחצית החיים של הבריום יש להפריד את הבריום מתוך הצזיום. לשם כל פותחה הערכה הבאה. כמות של 2 cc תמיסה המורכבת מ- 0.9% *NaCl* בתוך *0.04* מול של *HCl* מוזרקת על הצזיום ו"שוטפת" אותו. ייחודה של תמיסה זו שהיא קולטת את הבריום לתוכה (ראה איור 9).

**איור 9** : הזרקת התמיסה דרך הצזיום

הערה: הזרקת התמיסה על הצזיום יבצע רק על ידי עובד מורשה, תאם זאת עם המדריך.

בפרק זמן קצר יש להביא את הקיווטה (מבחנה קטנה) המכילה את התמיסה עם ה $^{137}$Ba קרוב ככל האפשר מול מונה הגייגר, ולמדוד את מספר המניות בפרקי זמן כך שנוכל לראות את הדעיכה במספר המניות כתלות בזמן.

ביצוע המדידות נעשה באמצעות הלשונית "מדידת קרינה". כאשר זמן המדידה הינו בין 12-15 שניות ומספר מדידות 20-25.

**<u>עיבוד תוצאות</u>**

הצג את תוצאות המדידה בגרף.
חשב את זמן מחצית החיים של החומר.
בצע דיון בתוצאות.

## 4.5 <u>בדיקת האופי הסטטיסטי של קרינה</u>

מטרת ניסוי זה הוא לבדוק את סוג ההתפלגות הסטטיסטית של הקרינה, כפי שהוסבר בסעיף 2.6 התפלגות הקרינה יכולה להתאים לפואסונית או גאוסית בהתאם לכמות המניות שמונה הגלאי במדידה.

**<u>מציאת אופי התפלגות פואסונית של הקרינה</u>**

בחר בלשונית "סטטיסטיקה". הנח את מקור הצזיום במרחק כלשהו מהגלאי וקבע את זמן המדידה כך שהממוצע של המניות יהיה נמוך, (באזור 2 -5 מניות למדידה). את הזמן המדויק אפשר למצוא בעזרת כמה ניסויי עזר.
לאחר שנמצא זמן מדידה מתאים בצע 4000-5000 מדידות.
זכור: התאמה טובה להתפלגות פואסון תתקיים כאשר הממוצע למדידה בודדת נמוך (הסבר ברקע התיאורטי) ומספר מדידות גבוה (כל התאמה נעשית מדויקת יותר כאשר מספר המאורעות גדול).

**<u>מציאת אופי התפלגות גאוסינית של הקרינה</u>**

חזור על התהליך עבור מצב שבו ממוצע המניות למדידה יהיה גבוה יותר (בין20-30) .

**עיבוד תוצאות :**

ערוך גרף של השכיחות המנורמלת עבור כל סוג התפלגות והתאם פונקציה מתאימה.

(ניתן להעזר בפקודת hist ו cftool בmatlab)

## 4.6 מציאת זמן המת של המונה

הפעילו את האוסילוסקופ שמחובר למונה גייגר. ביחרו "טריגר פנימי", וכניסת מתח על AC. במצב זה קרן האוסצילוסקופ מתחילה לנוע ימינה ברגע בו האות עובר סף. כאשר קצב המניה גבוה מאוד, מדי פעם יראו בנוסף לפולס שהפעיל את הטריגר, גם פולסים נוספים. פולסים אלה מופיעים רק אחרי הזמן המת.

שיטה שונה לגמרי היא מציאת הזמן המת על סמך מניית שתי מקורות. כפי שהוסבר בסעיף 2.7 בתיאוריה.

לוקחים שני מקורות A ו B, אחד בעל קצב התפרקות של $r_{0A}$ והשני בעל קצב $r_{0B}$ נבצע שלוש מדידות. במדידת קצב ההתפרקות של מקור A המונה ירשום קצב $r_A$, במדידת מקור B המונה ירשום $r_B$ ולבסוף עם שני המקורות ביחד והמונה ירשום קצב $r_{(A+B)}$.

מתוך המדידות הנ"ל אפשר לחשב את הזמן המת- $\tau$ שערכו:

$$\tau = \frac{r_A + r_B - r_{(A+B)}}{r_A \cdot r_B} \qquad (29)$$

- מדוד את מספר המניות <u>לשניה</u> (קצב הקריאה) המתקבל על ידי נוכחות שני המקורות ביחד. לאחר מכן מדוד מהו המספר המתקבל עבור כל אחד משני המקורות בנפרד, כאשר הם הוצבו באותו המקום שהם היו במדידה הקודמת של שני המקורות. שים לב שהצבת מקור אחד לא תשנה את קצב המניה של השני (ע"י הסתרה או פיזורים).

  זכור ! על מנת שהתוצאות יהיו מהימנות יש לדאוג לכך שקצב המניה יהיה גבוה ככל האפשר (מרחק קטן ככל האפשר בין המקורות לגלאי ומשך מדידה ארוך ,לפחות דקה).

חשב את הזמן המת של המקור. השווה לזה שקיבלת מהסקופ ובצע דיון בתוצאות.

## נספח 1 : סוגי ההתפלגות

(ערוך מתוך חוברת הרמזים של פרופ׳ גדעון ארז)

הנחת היסוד היא שהסיכוי של אטום להתפרק באינטרוול זמן $\Delta t$ בזמן כל שהוא אינה תלויה בזמן, אלא רק ב- $\Delta t$ וכמובן בסוג האטום.
נסתכל במספר ההתפרקויות במשך $\Delta t$, ונחזור על ניסוי זה הרבה פעמים.
נסמן ב - N את מספר ההתפרקויות הכללי שמצאנו.
נסמן ב - m את המספר הממוצע של ההתפרקויות בזמן $\Delta t$.
נסמן ב- p את הסיכוי של אטום מסוים להתפרק ב- $\Delta t$ מסוים ואת הסיכוי שהוא לא יתפרק ונסמן ב - q. מתקיים : $q = 1 - p$

הסיכוי שמתוך N התפרקויות תקרנה בדיוק k הוא : $p(k\,;N)$

$$p(k\,;N) = \binom{N}{k} q^{(N-k)} \quad p^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} q^{(N-k)} \quad p^k$$

ערך התוחלת של k הוא לפי הגדרה m.

$$m = \sum_{k=0}^{N} k \;\; p \;\; (k\,;N) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^{(N-k)} \; k \;\; p^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^{(N-k)} \;\; p \frac{d}{dp}\left(p^k\right) \; = p \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^{(N-k)} \;\; p^k \; =$$

$$= p \frac{d}{dp}(q+p)^N = N \;\; p\,(q+p)^{N-1} = N \;\; p$$

ולכן : $\mathrm{p} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$

$$p(k\,;N) \quad = \quad \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{(N-k)} \quad \left(\frac{m}{N}\right)^k$$

$$p(k\,;N) \quad = \quad \frac{m\,k}{k!} \quad \left(1 - \frac{m}{N}\right)^N \quad \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{-k} \quad \frac{N!}{N^k\,(N-k)!}$$

כדי לקבל את הסיכוי לקבל k התפרקויות יש לחזור על הניסוי הרבה פעמים ז"א להסתכל בגבול בו $N \to \infty$ .

שים לב:

$$\lim_{N\to\infty} \left(1-\frac{m}{N}\right)^{N} = e^{-m}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(1-\frac{m}{N}\right)^{k} = 1$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N\,!}{N^{k}\,(N-k)!} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\,(N-1)\ldots\ldots(N-k)}{N^{k}} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N^{k} - \dfrac{k\,(k+1)}{2}N^{(k-1)} - \ldots\ldots}{N^{k}} = 1$$

לכן:

$$\boxed{p(k) \equiv \lim_{N\to\infty} p(k;N) = \frac{m^{k}}{k!}e^{-m}}$$

**פילוג זה נקרא פילוג פואסון.**

**<u>הכרת הפילוג:</u>**

א. הנרמול:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{k}}{k\,!}\,e^{-m} = e^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^{k}}{k\,!} = e^{-m}\;e^{m} = 1$$

ב. ערך התוחלת של k:

$$\langle k \rangle \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k\,p(k) = e^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\,m^{k}}{k\,!} = e^{-m} =$$

$$= m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m^{(k-1)}}{(k-1)!} = m$$

ג. השונות $\sigma(k)$:

$$\sigma^2(k) \equiv \sum \left(k-\langle k\rangle\right)^2 p(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k^2\, p(k)\right) - m^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\, m^k}{(k-1)!}\, e^{-m}\right) - m^2 = e^{-m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)!}\, m\, \frac{d}{dm}\left(m^k\right)\right) - m^2 =$$

$$= e^{-m}\, m\, \frac{d}{dm}\left(m\, e^m\right) - m^2 = m + m^2 - m^2 = m$$

לכן :

$$\sigma(k) = \sqrt{m}$$

אם נעשתה מדידה אחת ובה נמצאו k התפרקויות, וכל מה שאנחנו יודעים הוא שזו דגימה מפילוג פואסון אבל עם m לא ידוע.

נסתכל על $p(k\,;m)$ כעל פילוג ל- m עם k נתון.

א. הנרמול:

$$\int_0^{\infty} p(k;m)\, dm = 1$$

<u>הוכחה :</u> בעזרת האינדיקציה לפי k עבור k = 0.

$$p(0;m) = e^{-m}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-m}\, dm = 1$$

עבור $k \geq 1$ נניח שהמשפט נכון ל $k-1$ ואז על ידי אינטגרציה בחלקים :

$$\int_0^{\infty} \frac{m^k}{k!}\, e^{-m}\, dm = -\frac{m^k}{k!}\, e^{-m}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{k\, m^{(k-1)}}{k!}\, e^{-m}\, dm = 1$$

ב. הערך הצפוי ביותר $\overline{m}$ של m הוא כאשר :

$$\frac{dp}{dm} = 0$$

$$\frac{dp}{dm} = \frac{d}{dm}\,\frac{m^k\, e^{-m}}{k!} = \frac{k\, m^{k-1}}{k!}\, e^{-m} - \frac{m^k}{k!}\, e^{-m} = 0$$

לכן $\overline{m}$ שהוא פתרון משוואה זאת מקיים $\overline{m} = k$ .

ג. ערך התוחלת $\langle m\rangle$ של m:

$$\langle m\rangle=\int_0^\infty m\ p\ dm=\int_0^\infty \frac{m^{(k+1)}}{k!}e^{-m}\ dm=(k+1)\int_0^\infty \frac{m^{(k+1)}}{(k+1)!}e^{-m}\ dm=k+1$$

שים לב ערך התוחלת של m שונה מהערך הצפוי ביותר.

ד. השונות של m:

$$\sigma^2(m)=\int_0^\infty (m-\langle m\rangle)^2\frac{m^k}{k!}e^{-m}\ dm=\int_0^\infty \left(m^2-(k+1)^2\right)\frac{m^k}{k!}e^{-m}\ dm=$$

$$=(k+1)(k+2)\int_0^\infty \frac{m^{(k+2)}}{(k+2)!}e^{-m}\ dm-(k+1)^2=k+1$$

$$\sigma(m)\ =\ \sqrt{\langle m\rangle}=\sqrt{k+1}$$

שים לב שלמספרים גדולים $k+1 \approx k$ $\sqrt{k+1}\approx\sqrt{k}$

ולכן: $\sigma \approx \sqrt{k} \approx \sqrt{\langle m\rangle}$

<u>לדוגמה</u>:

א. מנינו 10,000 מניות. המקור בממוצע פולט (באותו זמן) m.

$$m=10,001\pm\sqrt{10,001}=10,001\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{10,001}}\right)\approx 10,000\ (\pm 1\%)$$

ב. מנינו 8 מניות $m=\ 9\pm 3$.

ג. מנינו אפס מניות $m=\ 1\pm 1$.

## <u>מציאת קירוב לפילוג פואסון עבור m >> 1 בסביבות השיא k ~ m</u>

נשתמש בקירוב סטרלינג ל-!n הוא

$$n!\cong n^n e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi n}(1+\frac{1}{12}n+..........)$$

מכאן עבור k >> 1:

$$\frac{m^k}{k!}e^{-m}\approx\sqrt{2\pi k}\,\frac{m^k e^{-m}}{k^k e^{-k}}$$

$$k^k=(k/m)^k m^k \qquad\qquad e^{-k}=e^{-m}e^{(m-k)}$$

ומכאן עבור $k >> 1$ :

$$P(k) = m^k / k!e^{-m} \approx (m/k)^k e^{-(m-k)} / \sqrt{2\pi k}$$

$$\log P(k) = k\log(m/k) - (m-k) - \log(\sqrt{2\pi k})$$

$$\log(m/k) = \log(1 + (m/k - 1)) \cong (m/k - 1) - \frac{1}{2}(m/k - 1)^2 + \ldots$$

נשים לב :

$$(m/k - 1)^2 = (m-k)^2 / k^2$$

לכן :

$$\log P(k) = -(m-k)^2 / 2k - \log(\sqrt{2\pi k}) + \ldots$$

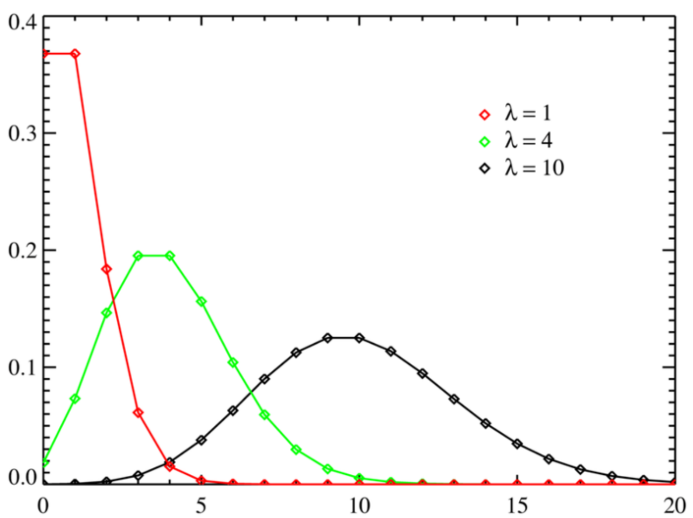
ועבור $k \cong m$ נקבל:

$$\boxed{P_{(m,k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot m}} Exp\left[-\frac{(k-m)^2}{2m^2}\right]}$$

**וזה הפילוג הגאוסי.**

**לדוגמה:**

באיור הבא מתוארת התפלגות פואסון עבור ממוצעים שונים **($m=\lambda$).**




התפלגות פואסון עבור ממוצעים שונים