פתרון 3

$$f(t)=\frac{A}{T}\cdot t \qquad 0<t<T \qquad f(t+T)=f(t)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt$$

$$=\frac{A}{T^2}\int_0^T t e^{-in\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T^2}\left[\frac{te^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0}\Big|_0^T + \frac{1}{in\omega_0}\int_0^T e^{-in\omega_0 t}\,dt\right]$$

$$=\frac{A}{T^2}\left[\frac{Te^{-in2\pi}}{-in\omega_0} - \frac{1}{(in\omega_0)^2}\left(\underbrace{e^{-in\cdot 2\pi}}_{1}-1\right)\right]$$

$$c_n=\frac{Ai}{n\omega_0 T}=\frac{Ai}{2\pi n}=\cancel{A} \qquad n=\mp1,\mp2,\mp3,\mp4\ldots$$

עבור $n=0$ נחשב מנוסחה:

$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{A}{T^2}\int_0^T t\,dt=\frac{1}{2}A$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega_0 t}$$

$$c_0 = \frac{1}{2} A \qquad c_n = \frac{Ai}{2\pi n} \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} A + \frac{Ai}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i n \omega_0 t}$$

כאשר הסכום הוא על כל האיברים בין $-\infty$ ל ∞
חוץ מ לאפס.

התמרת פורייה של גיאוסיאן

חשב את התמרת פורייה עבור הפונקצייה הבאה:

$$g\left(x\right)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}}$$

פתרון:

$$\tilde{g}\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}-ikx}dx$$

נשלים לריבוע:

$$\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}+ikx=\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+a\right)^{2}+b\Rightarrow$$

$$\frac{a}{\sigma^{2}}=ik\Rightarrow a=ik\sigma^{2}$$

$$\frac{a^{2}}{2\sigma^{2}}+b=0\Rightarrow b=\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}$$

נקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+ik\sigma^{2}\right)^{2}-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}dx=\frac{e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+ik^{2}\sigma^{2}\right)^{2}}dx$$

נחליף משתנים $du=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^{2}}}\quad u=\frac{x+ik^{2}\sigma^{2}}{\sqrt{2\sigma^{2}}}$ ונקבל:

$$\frac{e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}}{2\sqrt{\pi}\sigma^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^{2}}du$$

כעת נשתמש באינטגרל הגיאוסיאני:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^{2}}du=\sqrt{\pi}$$

ונקבל:

$$\tilde{g}\left(k\right)=\frac{1}{2\sigma^{2}}e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}$$

התמרת פורייה של גיאוסיאן עם רוחב σ היא גיאוסיאן עם רוחב $\frac{1}{\sigma}$. אם הגיאוסיאן המקורי היה צר, ההתמרה שלו רחבה ולהפך.