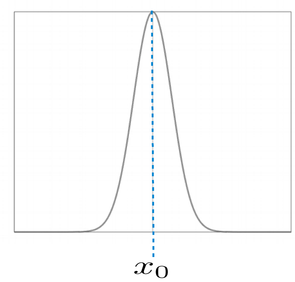
נתון חלקיק חופשי אשר מצבו בזמן t=0 מתואר ע"י פונקציית הגל:

$$\Psi(x, t=0) = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{4d^2}}$$

1. חשב את A
2. מצא את ערך התוחלת של מיקום החלקיק ב t=0 - $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t=0)^* x \Psi(x,t=0) dx$
3. מצא את אי הודאות במיקום החלקיק - $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$
4. מצא את התמרת הפורייה עבור פונקציה זו
5. חשב את Δk
6. חשב את המכפלה $\Delta x \times \Delta k$

<u>תשובה</u>

א. על מנת לחשב את A אנו צריכים לנרמל את הפונקציה



כך ש:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2}} dx$$

* אינטגרלים שימושיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^6}}$$

נגדיר $y = (x - x_0)$, כך ש $dy = dx$, ולכן אנו יכולים לעשות החלפת משתנה אינטגרציה ולקבל

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}} dy = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}} dy = A^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2d^2}}}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi} d}}$$

ב) ערך התוחלת של המיקום של החלקיק מוגדר בצורה הבאה:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t=0)^* x\Psi(x,t=0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\left|\Psi(x,t=0)\right|^2 dx$$

במקרה שלנו אנו מקבלים

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2}}dx$$

ניתן לעשות שוב את החלפת המשתנה אינטגרציה $y=(x-x_0)$ (נשים לב שצריך לשנות ל $x=y+x_0$), כך שאנו מקבלים

$$\begin{aligned}\langle x\rangle =& \int_{-\infty}^{\infty} (y+x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} (y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty} (x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =&0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}x_0\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2d^2}}}\end{aligned}$$

כך שאנו מקבלים $\langle x\rangle = x_0$

ג) את האי-ודאות מחשבים לפי המשוואה $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$. חישבנו $\langle x\rangle$ בחלק הקודם ולכן עלינו לחשב $\langle x^2\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle =& \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t=o)^* x^2\Psi(x,t=0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left|\Psi(x,t=0)\right|^2 dx\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2}}dx\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} (y+x_0)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} (y)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty} (2yx_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty} (x_0)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =&d^2+x_0^2\end{aligned}$$

ולכן אי-הודאות המתקבלת היא - $\Delta x = \sqrt{d^2+x_0^2-x_0^2} = d$

ד) על מנת לחשב את אי הודאות במרחב k עלינו לעשות התמרת פורייה של פונקציית הגל, נשתמש בשיטה של השלמה לריבוע על מנת לחשב זאת:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(k) =& \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{4d^2}}e^{-ikx}dx\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{4d^2}-ikx}dx\end{aligned}$$

השלמה לריבוע - אנחנו בוחרים את הפרמטרים a ו b כך ש:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{4d^2}-ikx=-\frac{x^2-2xx_0+x_0^2}{4d^2}-ikx=-\frac{1}{4d^2}(x+a)^2+b$$

כעת אנחנו משווים מקדמים – אנחנו לוקחים את כל האיברים שמכפילים את x בצד שמאל, ומשווים לכל האיברים שמכפילים את x בצד ימין:

$$\frac{2x_0}{4d^2}-ik=-\frac{2a}{4d^2}$$
$$2x_0-i4d^2k=2a$$
$$x_0-i2d^2k=a$$

כעת אנחנו יכולים לקחת את כל האיברים משני הצדדים אשר לא מכפילים את x ולקבל את הפרמטר b :

$$-\frac{x_0^2}{4d^2}=-\frac{a^2}{4d^2}+b$$
$$b=\frac{a^2}{4d^2}-\frac{x_0^2}{4d^2}$$
$$b=\frac{\left(x_0-i2d^2k\right)^2}{4d^2}-\frac{x_0^2}{4d^2}$$
$$b=-\frac{x_0^2}{4d^2}+\frac{\frac{\left(-i2d^2\right)^2}{(-i2d^2)^2}\left(x_0-i2d^2k\right)^2}{4d^2}$$
$$b=-\frac{x_0^2}{4d^2}+\frac{\left(-i2d^2\right)^2\left(\frac{x_0}{(-i2d^2)}-\frac{i2d^2k}{(-i2d^2)}\right)^2}{4d^2}$$
$$b=-\frac{x_0^2}{4d^2}+\frac{-4d^4\left(k-\frac{x_0}{(i2d^2)}\right)^2}{4d^2}$$
$$b=-\frac{x_0^2}{4d^2}+\frac{-\left(k-ix_0/2d^2\right)^2}{1/d^2}$$

הפרמטר b אינו תלוי ב x , ולכן יוצא לנו מהאינטגרציה על x בהתמרת פורייה, כך שהתמרת פורייה נותנת לנו:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\psi(x)\\ &= Ae^{b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4d^2}(x+a)^2}dx\\ &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}}e^{-\frac{x_0^2}{4d^2}}e^{\frac{-\left(k-ix_0/2d^2\right)^2}{1/d^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4d^2}\left(x+x_0-i2d^2k\right)^2}dx\end{aligned}$$

את האינטגרל אנחנו פותרים שוב על ידי החלפת משתנים ושימוש בנוסחה לאינטגרל גאוסיאני שקיבלנו, כך שאנו מקבלים:

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}\sqrt{d}e^{-\frac{x_0^2}{4d^2}}e^{-\frac{\left(k-ix_0/2d^2\right)^2}{1/d^2}}$$

ה) אי-הודאות המתקבלת ל k בחישוב דומה לאי-הודאות שחישבנו ל x . עלינו לחשב את צפיפות ההסתברות על k שיוצאת :

$$\begin{aligned}\rho(k) &= \tilde{\psi(k)}^{*}\tilde{\psi(k)}\\ &= \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}\sqrt{d}e^{-\frac{x_0^2}{4d^2}}e^{-\frac{\left(k+ix_0/2d^2\right)^2}{1/d^2}}\sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}\sqrt{d}e^{-\frac{x_0^2}{4d^2}}e^{-\frac{\left(k-ix_0/2d^2\right)^2}{1/d^2}}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}de^{-\frac{x_0^2}{2d^2}}e^{\frac{x_0^2}{2d^2}}e^{-\frac{k^2}{1/2d^2}}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}de^{-\frac{k^2}{1/2d^2}}\end{aligned}$$

כל שאנחנו יכולים "לקרוא" את האי-ודאות מהמכנה של הגאוסיאן, עלינו להביא אותו לצורה $2\sigma^2$ כך שאנחנו מקבלים ש σ היא האי-ודאות:

$$\frac{1}{2d^2} = \frac{2}{4d^2} = 2\sigma^2 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2d}$$

ולכן:

$$\Delta k = \frac{1}{2d}$$

ו) המכפלה $\Delta x \times \Delta k$ נותנת לנו

$$\Delta x \times \Delta k = d \times \frac{1}{2d} = \frac{1}{2}$$

שאלה 3

א.

$$\hat{p}u(x) = pu(x)$$

אופרטור התנע מוגדר בצורה הבאה:

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

$$-i\hbar\frac{d}{dx}u(x) = pu(x)$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = -\frac{p}{i\hbar}u(x) = \frac{pi}{\hbar}u(x)$$

$$u(x) = A\exp\left[\frac{pi}{\hbar}\cdot x\right]$$

ב.

$$u(x) = e^{ikx}$$

$$\hat{p}u(x) = pu(x)$$

$$-i\hbar\frac{du(x)}{dx} = pu(x)$$

$$-i\hbar[ike^{ikx}] = pe^{ikx}$$

$$\hbar ke^{ikx} = pe^{ikx}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \hbar\cdot k$$

$$u(x) = A\exp\left[\frac{pi}{\hbar}x\right]$$

אופרטור האנרגיה הוא:

$$\vec{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left[-i\hbar\frac{d}{dx}\right]^2}{2m} = \frac{\left[i^2\hbar^2\frac{d^2}{d^2x}\right]}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d^2x}$$

$$\vec{E}u(x) = Eu(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{d^2x} = Eu(x)$$

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{pi}{\hbar}u(x) \qquad \frac{d^2u(x)}{d^2x} = \frac{p^2i^2}{\hbar^2}u(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{p^2i^2}{\hbar^2}u(x) = Eu(x)$$

$$\frac{p^2}{2m}u(x) = Eu(x)$$

ערך האנרגיה הוא:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$