Wednesday, November 18, 2020 7:01 PM

חלקיק בבור

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<L\\ \infty & \text{else}\end{cases}$$

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\ ;\ E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\cdot n^2$$

$$\psi_n(x,t)=\varphi_n(x)\cdot e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$$\psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

נדרש:

1) $P(E_1)_{(t)}=?$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\varphi_2\cdot e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)$$

$$P(E_1)_{(t)}=\left|\langle\psi,\varphi_1\rangle\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\frac{E_1}{\hbar}t}\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle\right|^2=\frac{1}{2}\left[\text{אין תלות בזמן}\right]$$

2) $P(x<\frac{L}{2})_{(t)}=?$

$$P(x<\tfrac{L}{2})_{(t)}=\int_0^{L/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1^* e^{+i\frac{E_1}{\hbar}t}+\varphi_2^* e^{+i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\underbrace{\left[\frac{e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}+e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}}{2}\right]}_{\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right)t}\overbrace{\int_0^{L/2}\varphi_1\varphi_2\,dx}^{\text{לא מתאפס}}$$

$$=\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{4}{3\pi}}^{\sim 0.42}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$$

יש תלות בזמן!

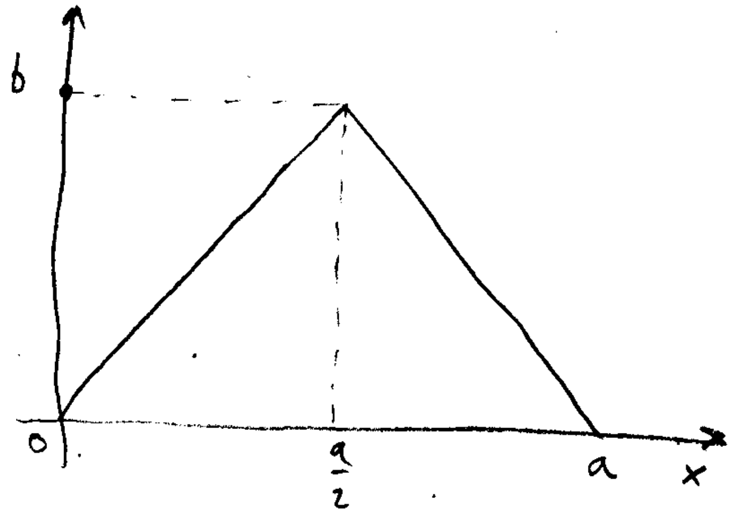
נתון חלקיק בבור פוטנציאל אין סופי ברוחב a.
המצבים הסטציונאריים לבור הם:

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

עם אנרגיות עצמיות

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

נתונה פונקציית הגל של החלקיק ב $t=0$ בצורת משולש:



א. מצא את b.

ב. מהי ההסתברות שמדידת האנרגיה תתן את הערכים E_1, E_2, E_3, E_4, E_5

ג. מצא ערך תוחלת של אנרגיה $\langle E\rangle$.

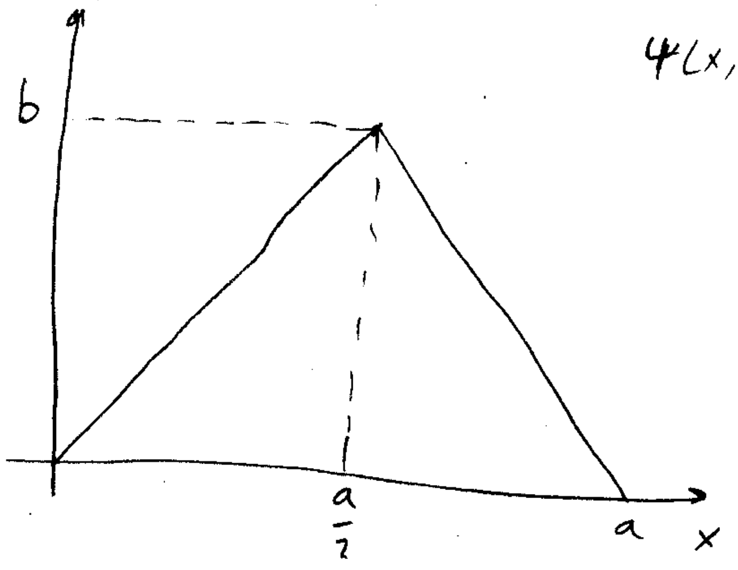
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ד. כתוב ביטוי להסתברות למצוא החלקיק באינטרוול $[x, x+dx]$ כתלות בזמן.

א.

הפונקציה $\psi(x,0)$

צריכה להיות מנורמלת,



משוואת הקו הראשון היא משוואת קו ישר עם שיפוע

$\frac{2b}{a}$ ועוברת בראשית ש $\psi(x)=0$

$$\psi(x) = \frac{2b}{a}x \qquad \text{עבור} \quad \frac{a}{2} > x > 0$$

$$\psi(x) = -\frac{2b}{a}x + 2b \qquad \text{עבור} \quad a > x > \frac{a}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi = 1$$

$$\int_0^{a/2} \frac{4b^2}{a^2}x^2 dx + \int_{a/2}^{a} \left(2b - \frac{2b}{a}x\right)^2 dx = 1$$

$$\int_0^{a/2} \frac{4b^2}{a^2}x^2 dx + \int_{a/2}^{a} 4b^2 dx - \int_{a/2}^{a} \frac{8b^2}{a}x\, dx + \int_{a/2}^{a} \frac{4b^2}{a^2}x^2 dx = 1$$

3

$$\frac{4b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{a/2} + 4b^2x\Big|_{a/2}^{a} - \frac{8b^2}{a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{a/2}^{a} + \frac{4b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{a/2}^{a} = 1$$

$$\frac{4b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{8} + 4b^2\left(a-\frac{a}{2}\right) - \frac{8b^2}{a}\cdot\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{a^2}{4}\right] + \frac{4b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}\left[a^3-\frac{a^3}{8}\right] = 1$$

$$\frac{b^2\cdot a}{6} + 2b^2a - \frac{\cancel{4}b^2}{a}\left[\frac{3}{\cancel{4}}a^2\right] + \frac{4b^2}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{7}{8}a^3\right] = 1$$

$$= \frac{1}{6}b^2a + 2b^2a - 3b^2a + \frac{7}{6}b^2a = 1$$

$$= \frac{1}{3}b^2a = 1$$

$$b^2a = 3 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{\frac{3}{a}}}$$

ב. ראינו ש $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

הפונקציה $\psi(x,0)$ היא סכום של פונקצי"ת עצמיות

נכתוב את $\psi(x,0)$ כסכום של סינוסים

אם $f(t)$ היא עם מחזור $T=2\tau$. אז

$f(t)$ זוגית אז:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right)dt$$

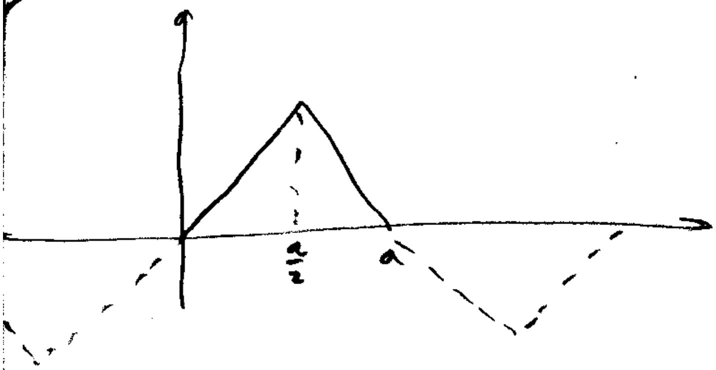
אם $f(t)$ אי זוגית אז טור פורייה הוא:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right)dt$$

במקרה שלנו הזוית / מעוות את תפיחות הן:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2b}{a}x & 0 < x < \frac{a}{2} \\ \frac{2b}{a}(a-x) & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$



ניתן להרחיב את הפונקציה
בצורה הבאה.
לכן החלק שאנו רוצים
לייצג כטור הוא אי זוגי.
ולכן:

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{a/2}\frac{2b}{a}x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx + \frac{2}{a}\int_{a/2}^{a}\frac{2b}{a}(a-x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{4b}{a^2}\int_0^{a/2}x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx + \frac{4b}{a^2}\int_{a/2}^{a}(a-x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

נחשב כל אינטגרל בנפרד:

$$\int_0^{a/2}x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = -\frac{ax}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\Big|_0^{a/2} + \frac{a}{n\pi}\int_0^{a/2}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= -\frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$$

$$\int_{-a/2}^{a}(a-x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$$

ואז:

$$\boxed{b_n = \frac{8b}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)}$$

נקבל מכאן:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8b}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

נסתכל על מספר האיברים הראשונים:

$$f(x) = \frac{8b}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \frac{1}{3^2}\sin\left(3\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{5^2}\sin\left(5\frac{\pi}{a}x\right) - \frac{1}{7^2}\sin\left(7\frac{\pi}{a}x\right)\dots\right]$$

$$f(x) = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a}\,\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\left[\phi_1 - \frac{1}{3^2}\phi_3 + \frac{1}{5^2}\phi_5 - \frac{1}{7^2}\phi_7 + \frac{1}{9^2}\phi_9 \dots\right]$$

ההסתברות לקבל את E_1 היא:

$$p(E_1) = \frac{8^2\cdot 3}{2\pi^4} = 0.9855 \qquad p(E_2) = 0$$

$$p(E_3) = \frac{8^2\cdot 3}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{9^2} = 0.0121 \qquad p(E_4) = 0$$

$$p(E_5) = \frac{8^2\cdot 3}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{25^2} = 1.57\cdot 10^{-3}$$

I

$$\langle E\rangle = \sum p(E)\cdot E$$

עבור n
אי זוגי

$$\langle E\rangle = \sum\left[\frac{8\cdot\sqrt{3}}{\pi^2\sqrt{2}\,n^2}\right]^2\cdot\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\langle E\rangle = {\sum}' \frac{64\cdot 3}{\pi^4\cdot 2\cdot n^4}\cdot\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \sum_1^\infty \frac{48\,\hbar^2}{\pi^2 n^2 m}$$

$$= \sum_1^\infty \frac{48\,\hbar^2}{\pi^2(2n+1)^2 m} = \frac{48\,\hbar^2}{\pi^2 m}\cdot\sum\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{48\,\hbar^2}{\cancel{\pi^2} m}\cdot\frac{\cancel{\pi^2}}{8} = \frac{6\,\hbar^2}{m}$$