Ladder operators in QHO

exercise 3_4906

נתון אוסצילטור הרמוני חד מימדי עם תדירות ω .

א) יש להראות כי ניתן לרשום את ההמילטוניאן כ $H=\hbar\omega(a^\dagger a+1/2)$. בעזרת ההגדרות של אופרטורי הסולם

ב) יש להראות מה עושים אופרטורי הסולם למצב ϕ_0 ,ϕ_1 ? בצורה מפורשת .

ג) מכינים חלקיק במצב $|\phi\rangle=A\left[|1\rangle+|2\rangle+\sqrt{2}|3\rangle\right]$.

1) מהו A

2) מהי תוחלת ושונות של אנרגיה

3) איך נראה המצב בזמן t

4) חשב את ערך התוחלת למיקום לחלקיק זה - $\langle\phi|x|\phi\rangle$

מוטיבציה

אנחנו יכולים לרשום את האופרטור ההמילטוניאני של משוואת שרדינגר שלא תלויה בזמן לפוטנציאל הרמוני מסוג $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ בצורה הבאה:

$$\frac{1}{2m}\left[p^2+(m\omega x)^2\right]\psi=E\psi$$

כאשר $p=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$

אנחנו רוצים לגרום להמילטוניאן להיות מיוצג על ידי אופרטורים "פשוטים" יותר. אם ההמילטוניאן היה מספרים, היינו יכולים לכתוב משהו כמו $u^2+v^2=(iu+v)(-iu+v)$. אך מכיוון שההמילטוניאן הוא אופרטורים זה לא כזה פשוט. למרות זאת אפשר בכל זאת לראות איך ניראה הניסיון לעשות פירוק של ההמילטוניאן לשני אופרטורים מהסוג:

$$a^+=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{i}{m\omega}p\right)$$

$$a^-=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p\right)$$

פתרון

א) נבדוק מה נותן לנו הכפל a^+a^- :

$$a^+a^-=\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+\frac{1}{m^2\omega^2}p-\frac{i}{m\omega}px+\frac{i}{m\omega}xp\right)$$

$$=\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+\frac{1}{2\hbar m\omega}p^2-\frac{i}{2\hbar}[p,x]$$

איפה שהכנסנו את הקומוטטור של האופרטורים x ו p : $[p,x]=px-xp$, אשר נותן לנו אינטואיטיבית "מדד" לעד כמה לא ניתן להחליף את הסדר של האופרטורים שנתונים בתוך הסוגריים. על מנת לחשב מהו הקומוטטור אנחנו צריכים להפעיל אותו על "פונקציית מבחן", ניקח אותה כ $f(x)$:

$$[p,x]=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(xf(x))-x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{df}{dx}+f-x\frac{df}{dx}\right)=\frac{\hbar}{i}f=-i\hbar f(x)$$

ולכן

$$a^+a^-=\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+\frac{1}{2\hbar m\omega}p^2-\frac{i}{2\hbar}[p,x]=\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+\frac{1}{2\hbar m\omega}p^2-\frac{i}{2\hbar}(-i\hbar)$$

מכיון שההמילטוניאן הוא $H=\frac{1}{2m}\left[p^2+(m\omega x)^2\right]$, יוצא לנו מהמשוואה הקודמת

$$\hbar\omega\left(a^+a^-+\frac{1}{2}\right)=H$$

ב) נבדוק מה מבצעים האופרטורים a^+,a^- על מצבי היסוד:

$$\phi_0=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

$$\phi_1=\sqrt{2\pi}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}xe^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

נבדוק ל־a^- :

$$\begin{aligned}a^-\phi_0&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\\&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\\a^-\phi_1&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p\right)\sqrt{2\pi}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}xe^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\\&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{2\pi}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\left(x^2+\frac{\hbar}{m\omega}-x^2\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\\&=\phi_0\end{aligned}$$

ובאותה צורה :

$$a^+\phi_0=\phi_1$$

$$a^+\phi_1=\sqrt{2}\phi_2$$

ג) פונקציית הגל של חלקיק נתונה לנו $|\phi\rangle=A\left[|\phi_1\rangle+|\phi_2\rangle+\sqrt{2}\,|\phi_3\rangle\right]$

1) נימצא את A כך שהפונקצית גל תהיה מנורמלת:

$$\langle\phi\,|\phi\rangle=A^2\left[\langle\phi_1|+\langle\phi_2|+\sqrt{2}\,\langle\phi_3|\right]\left[|\phi_1\rangle+|\phi_2\rangle+\sqrt{2}\,|\phi_3\rangle\right]=4A^2$$

ולכן $A=1/2$

2) ניתן להוכיח שהאופרטורים שהגדרנו בסעיף הראשון נותנים את התוצאה הבאה:

$$a^+\,|\phi_n\rangle=\sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle$$

$$a^-\,|\phi_n\rangle=\sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle$$

וכן ניתן להוכיח שהאופרטור המוגדר כ $\hat{N}=a^+a^-$ הוא בעל הערך העצמי:

$$\hat{N}\,|\phi_n\rangle=n\,|\phi_n\rangle$$

בעזרת אופרטור זה ניתן לכתוב את ההמילטוניאן בצורה :

$$\hat{H}\,|\phi_n\rangle=\hbar\omega\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)|\phi_n\rangle=E_n\,|\phi_n\rangle$$

$$
\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle = \langle \phi | \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) | \phi \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left[\langle \phi_1 | + \langle \phi_2 | + \sqrt{2} \langle \phi_3 | \right] \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \left[| \phi_1 \rangle + | \phi_2 \rangle + \sqrt{2} | \phi_3 \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\langle \phi_1 | + \langle \phi_2 | + \sqrt{2} \langle \phi_3 | \right] \frac{1}{2} \left[(1.5\hbar\omega) | \phi_1 \rangle + (2.5\hbar\omega) | \phi_2 \rangle + \sqrt{2} (3.5\hbar\omega) | \phi_3 \rangle \right] \\
&= \hbar\omega \frac{1}{4} (1.5 + 2.5 + 3.5 \times 2) = 2.75\hbar\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle E^2 \right\rangle &= \langle \phi | \hat{H}\hat{H} | \phi \rangle = \langle \phi | \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)^2 | \phi \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left[\langle \phi_1 | + \langle \phi_2 | + \sqrt{2} \langle \phi_3 | \right] \frac{1}{2} \left[(1.5\hbar\omega)^2 | \phi_1 \rangle + (2.5\hbar\omega)^2 | \phi_2 \rangle + \sqrt{2} (3.5\hbar\omega)^2 | \phi_3 \rangle \right] \\
&= \hbar^2\omega^2 \frac{1}{4} \left(1.5^2 + 2.5^2 + 3.5^2 \times 2 \right) = 8.25\hbar^2\omega^2
\end{aligned}
$$

$$
\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = 0.84\hbar\omega
$$

3) בזמן t החלקיק נימצא במצב

$$
\begin{aligned}
|\phi(t)\rangle &= \frac{1}{2} \left[|\phi_1\rangle e^{iE_1 t/\hbar} + |\phi_2\rangle e^{iE_2 t/\hbar} + \sqrt{2} |\phi_3\rangle e^{iE_3 t/\hbar} \right] \\
&= \sum_n c_n |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \ \ , \ c_1 = 1/2 \ , c_2 = 1/2 \ , c_3 = 1/sqrt2
\end{aligned}
$$

(4

$$
\begin{aligned}
\langle \phi(t) | x | \phi(t) \rangle &= \langle \phi(t) | \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a} \right) | \phi(t) \rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_m c_m \langle m | e^{iE_m t/\hbar} \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a} \right) \sum_n c_n | n \rangle e^{-iE_n t/\hbar} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_n \sum_m c_m c_n e^{-(\omega_n - \omega_m)t} \left(\langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle + \langle m | \hat{a} | n \rangle \right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_n \sum_m c_m c_n e^{-(\omega_n - \omega_m)t} \left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1} \right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(c_2 c_1 \sqrt{2} e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + c_3 c_2 \sqrt{3} e^{i(\omega_3 - \omega_2)t} + c_1 c_2 \sqrt{2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c_2 c_3 \sqrt{3} e^{i(\omega_2 - \omega_3)t} \right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{2} \cos(\omega t) + \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\omega t) \right)
\end{aligned}
$$