כבידה 2 – חורים שחורים

רשימות על-פי הרצאות בקורס בכבידה באוניברסיטת בן-גוריון
המרצה והמחבר : רמי ברושטיין
ערך וחיבר את השאלות : רמי ברושטיין
תודה לתלמיד תומר טל על רשימות מהקורס והתרגול.
את הרשימות משלים חומר נוסף הנמצא באתר האינטרנט של הקורס, תרגילים, פתרונות, חומר לקריאה נוספת, ואמצעי עזר לחישוב.

פרק 4: חורים שחורים

1. פתרון שוורצשילד ומשפט בירקהוף (כבידה 1)
2. קריסת חומר תחת כבידה עצמית
3. תנועה של גופי בוחן בגיאומטריית שוורצשילד (כבידה 1)
4. הסחה לאדום (כבידה 1)
5. האופק : האיזור סביב רדיוס שוורצשילד.
6. מעבר לאופק : קואורדינטות קרוסקאל, דיאגרמות מרחב זמן.
7. המבנה הסיבתי, קואורדינטות פנרוז ודיאגרמות פנרוז.
8. חוקי התנועה של חורים שחורים, תרמודינמיקה של חורים שחורים

פתרון שוורצשילד

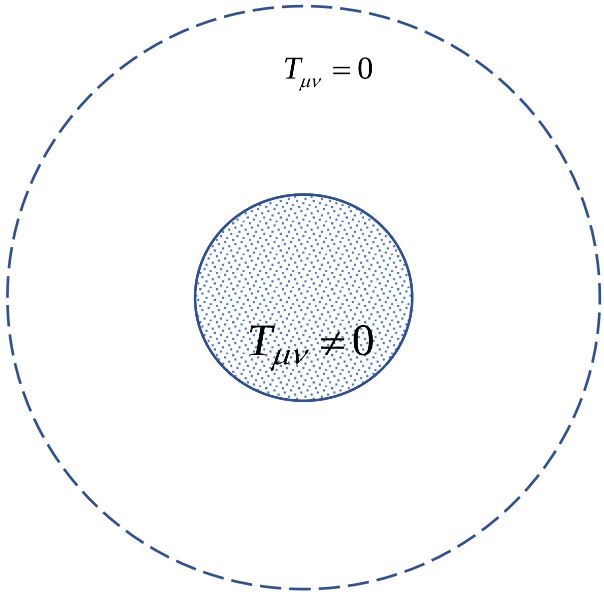
זהו פתרון של משוואות איינשטיין ללא מקורות, מחוץ למקור עם סימטריה כדורית. משפט בירקהוף מוכיח שזהו הפתרון היחיד. אלמנט האורך בגיאומטריית שוורצשילד נתון על ידי :

$$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{rc^2})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} + r^2 d\Omega_2^2 \qquad (3.1)$$

הכבידה יחסותית כאשר $T_{\mu\nu}=0$ גם קרוב לרדיוס שוורצשילד $r \sim R_S = \frac{2GM}{c^2}$

רדיוס שוורצשילד של השמש: ~ 1 ק"מ לעומת הרדיוס שלה ~ 10^6 ק"מ .

רדיוס שוורצשילד של 1 ק"ג ~ 10^{-27} מ' .



חור שחור (נבין יותר מאוחר את משמעות השם) כאשר גם לפחות בחלק מהאזור $\frac{r-R_S}{R_S} \ll 1$ עדיין $T_{\mu\nu}=0$.

<u>טענות</u>:

1. חורים שחורים הם התוצר הסופי של קריסה בהשפעת כבידה של מערכות בעלות מסה הגדולה ממסה קריטית מסוימת.
2. חורים שחורים נפוצים מאוד.

קריסה של חומר תחת כבידה עצמית (על פי פרק Hartle 12)

נדון ב"כוכב" – ענן גז המורכב רובו ממימן וקצת הליום המתחיל לקרוס תחת השפעת הכבידה העצמית שלו. במהלך הקריסה, צפיפות האנרגיה ρ , של הגז עולה ולכן גם הטמפרטורה שלו $\rho \sim T^4$. כאשר הטמפרטורה עולה לטמפרטורת ההיתוך של מימן מתחיל תהליך של היתוך תרמו-גרעיני בו משתחררת אנרגיה, נוצר לחץ המתנגד לכוח הכבידה והכוכב מגיע לשיווי משקל. מחזור הבעירה התרמו-גרעיני מסתיים כאשר כל הגז הופך לברזל והדלק הגרעיני נגמר.

ואז ? שתי אפשרויות:

א. מקור אחר שאינו תרמי מאזן את כוח הכבידה והכוכב מגיע לשווי משקל, למשל, אפקט קוונטי. לדוגמה, לחץ פרמי של אלקטרונים – גמד לבן , או לחץ פרמי של נויטרונים – כוכב נויטרונים.

ב. קריסה מתמשכת תחת השפעת הכבידה כאשר המסה גדולה מספיק.

נעריך את המסה הגדולה ביותר של גמד לבן. נניח A – מספר האלקטרונים היחסותיים, R רדיוס הכוכב. את ה"גודל" של אלקטרון נעריך על ידי אורך גל קומפטון שלו, ונניח שהאלקטרונים הם בצפיפות המרבית האפשרית, כלומר אלקטרון אחד בתוך כל נפח קומפטון: $A\lambda_e^3 \sim R^3 \Rightarrow p_F \sim \hbar/\lambda_e \sim A^{1/3}\hbar/R$. אנרגיית פרמי של האלקטרונים היחסותיים נתונה לכן על ידי $E_F \sim Ap_Fc \sim A^{4/3}\frac{\hbar c}{R}$. כתנאי לשווי משקל של מצב קשור נדרוש $E_F + E_G \le 0$ כאשר אנרגית הכבידה נתונה על ידי $E_G \sim -\frac{G\left(m_pA\right)^2}{R}$, מכיוון שמסת הכוכב היא בקירוב מסת הפרוטונים שבו,(m_p מסת הפרוטון) ומכיוון שהכוכב אינו טעון חשמלית, מספר הפרוטונים שווה למספר האלקטרונים. המספר הגדול ביותר של אלקטרונים (ופרוטונים) כך שהכוכב עדיין במצב קשור נקבע על ידי התנאי $E_F + E_G = A^{4/3}\frac{\hbar c}{R} - G\frac{(m_pA)^2}{R} = 0$ או $A_{crit} \sim \left(\frac{\hbar c}{Gm_p^2}\right)^{3/2} \sim 10^{57}$ ולכן המסה הגדולה ביותר שלחץ פרמי של אלקטרונים יכול לאזן היא בקירוב מסת השמש: $M_{crit} \sim m_pA_{crit} \sim 10^{31}Kg \sim 10M_\odot$

כעת נעריך את המסה הגדולה ביותר של כוכב נויטרונים. A – מספר הנויטרונים היחסותיים, R רדיוס הכוכב ואת ה"גודל" של נויטרון נעריך על ידי אורך גל קומפטון שלו. ונניח שהנויטרונים הם בצפיפות המרבית האפשרית

$$A\lambda_n^3 \sim R^3 \Rightarrow p_F \sim \hbar/\lambda_n \sim A^{1/3}\hbar/R$$

אנרגיית פרמי של הנויטרונים היחסותיים נתונה לכן על ידי $E_F \sim Ap_F c \sim A^{4/3}\frac{\hbar c}{R}$

כמו בדוגמה הקודמת, כתנאי לשווי משקל של מצב קשור נדרוש $E_F + E_G \le 0$ כאשר אנרגית הכבידה נתונה על ידי $E_G \sim -\frac{G(m_n A)^2}{R}$ מכיוון שמסת הכוכב היא בקירוב מסת הנויטרונים שבו, (m_n מסת הנויטרון).

המספר הגדול ביותר של נויטרונים נקבע על ידי התנאי $E_F + E_G = 0$ או $A_{crit} \sim \left(\frac{\hbar c}{Gm_n^2}\right)^{3/2} \sim 10^{58}$

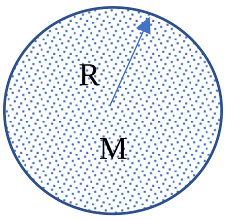
ולכן המסה הגדולה ביותר שלחץ פרמי של נויטרונים יכול לאזן היא בקירוב מסת השמש: $M_{crit} \sim m_n A_{crit} \sim 10^{31} Kg \sim 10 M_\odot$

המסה המדויקת היא $M_{crit} \sim 1.5 M_\odot$ ותלויה בפרמטרים נוספים המאפיינים את כוכבי הנויטרונים. נשים לב שלמרות שאורך גל קומפטון של נויטרון קטן פי 2000 בערך מאורך גל קומפטון של אלקטרון, המסה הגדולה ביותר של כוכב המאוזן על ידי לחץ פרמי שווה בקירוב בשני המקרים.

מסקנה: כאשר המסה של ענן הגז גדולה יותר ממספר מסות שמש, קריסתו תחת הכבידה העצמית היא בלתי נמנעת!

שיטה נוספת להערכת מסה מרבית של כוכב מתבססת על הערכת הצפיפות המרבית האפשרית של חומר מוכר.

נניח "כוכב" במסה כוללת M וברדיוס R, שהתפלגות המסה שלו היא בעלת סימטריה כדורית, נסמן את צפיפות המסה ב $\rho(r)$ ואת הצפיפות על שפת הכוכב ב ρ_0. בתנאים מסוימים וסבירים, הצפיפות במרכז הכוכב גדולה מהצפיפות קרוב לשפתו:



$\frac{d\rho(r)}{dr} < 0$ ולכן $\rho_0 < \rho(r)$. מכיוון שכך $\int d^3r \rho_0 < \int d^3r \rho(r) = M$ ולכן $M > \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$.

וגם משיקולים דומים $M < \frac{4\pi}{3}\rho(0)R^3$. בהמשך נזניח את הפקטור המספרי.

בנוסף נדרוש שרדיוס הכוכב גדול מרדיוס שוורצשילד שלו $\frac{2GM}{c^2R} < 1$ וביחד נקבל את אי השוויון הבא

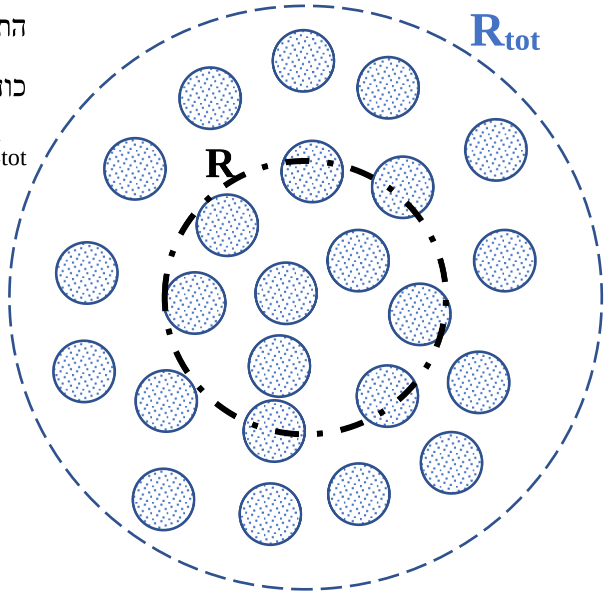
$\frac{2G\rho_0 R^3}{c^2R} < \frac{2GM}{c^2R} < 1$ המוביל לאי השוויון $R < \frac{c}{\sqrt{\rho_0 G}}$. נציב ונקבל $M < \rho(0)R^3 < \frac{\rho(0)c^3}{(\rho_0 G)^{3/2}}$

כעת נחסום את $\rho(0)$ על ידי הצפיפות המרבית הידועה האפשרית, הצפיפות של חומר גרעיני $\rho(0) < \rho_N = \frac{m_N}{fm^3} \sim 10^{18} Kg/m^3$

ונקבל $M < \frac{\rho(0)c^3}{(\rho_0 G)^{3/2}} < \left(\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)^{3/2}\frac{c^3}{\rho_N^{1/2}G^{3/2}} \sim \left(\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)^{3/2} 10^{30} Kg \sim \left(\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)^{3/2} M_\odot$

כלומר, הערכה דומה להערכות הקודמות בהנחה שהצפיפות משתנה יחסית מעט בין המרכז לשפה.

קריסה של גופים לא-יחסותיים תחת כבידה עצמית



התפלגות בעלת סימטריה כדורית של גופים שהכוח היחיד הפועל עליהם הוא כוח הכבידה. הגופים נמצאים בתוך נפח כדורי שרדיוסו R_{tot} , מסתם הכללית M_{tot} וצפיפות המסה שלהם אחידה $\rho = M_{tot}/V$.

תחת השפעת הכבידה העצמית, הרדיוס R_{tot} יקטן והצפיפות ρ תגדל. נזכיר שבתורה לא יחסותית המסה נשמרת. נרצה לחשב את התלות הזמנית של התפלגות הגופים.

החוק השני של ניוטון עבור גוף הנמצא ברדיוס R מוביל למשוואה

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = -\frac{GM(R)}{R(t)^2} \quad (3.2)$$

כאשר M(r) היא המסה הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R , $M(R) = 4\pi\int \rho(t)\, r^2 dr$.

נכפיל את משוואה (3.2) ב $\frac{dR(t)}{dt}$ ונקבל ביטוי לאנרגיה של הגוף (ליחידת מסה)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{GM(R)}{R}\right] - \frac{G}{R}\frac{dM}{dt} \quad (3.3)$$

מכיוון שהמסה נשמרת האבר האחרון מתאפס,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 = \frac{GM(R)}{R} + e \quad (3.4)$$

כאשר e היא האנרגיה של הגוף ליחידת מסה. נבחר תנאי התחלה כך ש e מתאפס והגופים נעים כלפי המרכז, ולכן

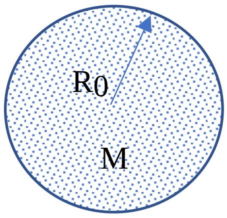
$$\frac{dR(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (3.5)$$

פתרון משוואה (3.5) נתון על ידי

$$R(t) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{2/3} (2GM)^{1/3} (t_* - t)^{2/3} \quad (3.6)$$

זהו פתרון סינגולרי! R(t) מתאפס בזמן סופי t_* הנקבע על ידי הרדיוס ההתחלתי R(0). האנרגיה הקינטית מתבדרת (ולכן הקרוב הלא יחסותי נשבר) וגם האנרגיה הפוטנציאלית מתבדרת.

קריסה של גופים יחסותיים תחת כבידה עצמית (Oppenheimer-Snyder collapse 1939)



נניח התפלגות חומר במסה כללית M כך שהלחץ p = 0 בתוך נפח כדורי התחלתי שרדיוסו R_0 הגדול מרדיוס שוורצשילד כך ש $\frac{2GM}{c^2 R_0} < 1$.

התפלגות החומר בעלת סימטריה כדורית, צפיפות המסה אחידה $\rho = M/V$. מחוץ להתפלגות המסה $r > R_0$, אין מקורות ולכן הגיאומטריה מחוץ להתפלגות המסה היא גיאומטריית שוורצשילד:

$$ds_+^2 = -(1-\tfrac{2GM}{rc^2})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} + r^2 d\Omega_2^2$$

בתוך התפלגות המסה $r < R_0$, הגיאומטריה היא של כדור תלת-ממדי S^3 . מיקום השפה משתנה בזמן כי התפלגות המסה קורסת תחת הכבידה העצמית שלה.

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\left(d\chi^2 + \mathrm{Sin}^2\chi\, d\Omega_2^2\right) \quad (3.7)$$

τ הוא הזמן העצמי של אלמנט מסה הנמצא ברדיוס נתון.

הצגה אחרת של הגיאומטריה בתוך התפלגות המסה נתונה על ידי

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2\, d\Omega_2^2\right) \quad (3.8)$$

כלומר גיאומטריית FRW עם עקמומיות מרחבית k=+1 .

אנו מעוניינים למצוא את התפלגות המסה כפונקציה של הזמן עבור תנאי התחלה נתונים ולהבין האם המסה קורסת בזמן סופי תחת הכבידה העצמית, כפי שראינו בחישוב הניוטוני. לשם כך נפתור את משוואות איינשטיין.

<u>משוואות איינשטיין להתפלגות המסה</u>

במשוואות איינשטיין $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$ טנזור התנע אנרגיה נתון על ידי $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ מכיוון שהלחץ p = 0 . עבור הגיאומטריה (3.7) , משוואות איינשטיין הן:

$$tt: H^2 = \tfrac{8\pi G}{3}\rho - \tfrac{1}{a^2}$$

$$ii: \frac{dH}{d\tau} = -4\pi G\rho + \tfrac{1}{a^2} \quad (3.9)$$

כאשר $H = \frac{da}{d\tau}/a$.

ומשימור טנזור התנע-אנרגיה $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ עבור $\nu = \tau$ מקבלים את המשוואה (התלויה) הבאה,

$$\frac{d\rho}{d\tau} + 3H\rho = 0 \tag{3.10}$$

משוואה זו ניתנת לכתיבה כך

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\tau}\left(\rho a^3\right) = 0 \tag{3.11}$$

פתרון משוואה (3.11) נתון על ידי

$$\rho = \rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{3.12}$$

תנאי ההתחלה למשוואות הוא $\frac{da}{d\tau}_{|\tau=0} = 0$, כלומר החומר מתחיל ממצב שבו הוא במנוחה.

בנוסף ידוע כי בזמן $\tau = 0$, $a_0^2 \operatorname{Sin}^2 \chi_0 = R_0^2$ וכן $\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3 = M$. ממשוואה (3.9) נובע כי $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{1}{a_0^2}$

ולכן

$$a_0^2 = \frac{R_0^3}{2GM} \tag{3.13}$$

<u>פתרון משוואות איינשטיין להתפלגות המסה</u>

ממשוואה (3.9) נקבל

$$\frac{da}{d\tau} = \pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - 1} = \pm\sqrt{\frac{a_0}{a} - 1} \tag{3.14}$$

כאשר בשוויון האחרון הצבנו את הפתרון ממשוואה (3.12) וגם את משוואה (3.13) . מכיוון שאנו מעוניינים בפתרון בו המסה מתחילה לקרוס, נבחר את סימן ה (-) במשוואה (3.14) ונקבל

$$-\frac{da}{\sqrt{\frac{a_0}{a} - 1}} = d\tau \tag{3.15}$$

באמצעות ההצבה $a/a_0 = \operatorname{Cos}^2\theta$ נוכל לפתור את המשוואה באמצעות חישוב האינטגרל,

$$2a_0\int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta = \tau_* - \tau_0 \tag{3.16}$$

כאשר $\tau_* = \tau_{|a(\tau_*)=0}$, כלומר $\tau_* - \tau_0$ הוא הזמן שלוקח להתפלגות המסה לקרוס.

זמן זה נתון על ידי

$$\frac{\pi}{2}a_0 = \tau_* - \tau_0 \tag{3.17}$$

אם נציב את (3.13) נקבל

$$\frac{\pi}{2} R_0 \sqrt{\frac{R_0}{2GM}} = \tau_* - \tau_0 \quad (3.18)$$

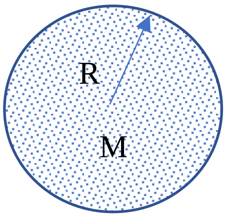
זמן הקריסה סופי!

זמן הקריסה תלוי כמה קומפקטית התפלגות המסה, כלומר מה היחס בין הרדיוס ההתחלתי לרדיוס שוורצשילד של המסה, ופרופורציוני לזמן מעבר האור ברדיוס ההתחלתי R_0/c . נשים לב לכך שזמן הקריסה אינו תלוי במרחק של הקליפות הכדוריות מהמרכז, כלומר זמן הקריסה של של אלמנט מסה אינו תלוי במיקומו ההתחלתי.

המאמר של אופנהיימר וסניידר פתח דיון ארוך על משמעות התוצאות ועל המצב הסופי של חומר הקורס תחת כבידתו העצמית דיון שהסתיים (או לפחות כך נראה היה) בהוכחת משפטי הסינגולריות של הוקינג ופנרוז, כשלושה עשורים מאוחר יותר.

חסם בוכדאהל (Buchdahl)

חסם בוכדאהל הינו חסם על הרדיוס המינימלי שבו יכולה להיות מוכלת התפלגות חומר בעלת סימטריה כדורית ועדיין להיות במצב שווי משקל, כלומר מצב שבו הלחץ יכול לאזן את כוח הכבידה.



התנאים בהם חסם בוכדאהל תקף הם הבאים:

1. צפיפות האנרגיה חיובית וסופית והלחץ חיובי וסופי (תנאי החיוביות של הלחץ לא מופיע במפורש).
2. צפיפות האנרגיה עולה לכיוון מרכז התפלגות החומר.
3. מחוץ להתפלגות המסה אין חומר, כלומר הגיאומטריה מחוץ להתפלגות המסה היא גיאומטריית שוורצשילד.
4. הגיאומטריה בתוך התפלגות החומר "סבירה" – תנאי הסבירות יפורטו בהמשך.

תחת תנאים אלו חסם בוכדאהל הוא

$$R > \tfrac{9}{8} R_S = \tfrac{9}{8} 2GM \quad (3.19)$$

כלומר הקריסה בלתי נמנעת גם כאשר החומר עדיין מרחק סופי מחוץ לרדיוס שוורצשילד שלו, ללא תלות בכמה גדול הלחץ שהוא יכול להפעיל. כלומר: הכבידה חזקה יותר מכל כוח קלאסי סביר.

אלמנט האורך של הגיאומטריה בתוך התפלגות החומר נתון על ידי

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (3.20)$$

טנזור התנע-אנרגיה של החומר הוא $T^{\mu}{}_{\nu} = diag(-\rho, p, p, p)$

משוואות איינשטיין הרלוונטיות הן $R_{tt} - \tfrac{1}{2} g_{tt} R = e^{\nu} 8\pi G \rho$ ממנה נובעת המשוואה הבאה

$$\frac{1}{r^2} e^{-\lambda} (r\, \partial_r \lambda - 1) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G \rho \quad (3.21)$$

ו $R_{rr} - \tfrac{1}{2} g_{rr} R = e^{\lambda} 8\pi G p$ ממנה נובעת המשוואה

(3.22) $$\frac{1}{r^2}e^{-\lambda}(r\,\partial_r\nu+1)-\frac{1}{r^2}=8\pi G\;p$$

ממשוואת שימור טנזור התנע-אנרגיה $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$ עבור $\nu = r$ מקבלים את המשוואה (התלויה) הבאה,

(3.23) $$\partial_r p=-\tfrac{1}{2}(\rho+p)\partial_r\nu$$

כדי לפתור את המשוואות נזדקק למספר הגדרות.

הראשונה שבהן, היא ההגדרה של כמות האנרגיה הכוללת בתוך כדור ברדיוס r ,

(3.24) $$\mu(r)=4\pi\int_0^r\rho(s)\,s^2ds$$

באמצעות הפונקציה $\mu(r)$ נוכל לפתור עבור הפונקציה $\lambda(r)$. נכפיל את משוואה (3.21) ב r^2 ונקבל

(3.25) $$\partial_r(r\,e^{-\lambda})=1-8\pi G\rho\,r^2$$

באמצעות אינטגרציה של שני האגפים מ 0 ל r בצירוף התנאי ש $\lambda(0)$ סופית נקבל,

(3.26) $$e^{-\lambda}=1-\frac{2G\mu(r)}{r}$$

משוואות (3.26), (3.23) ו (3.22) נקראות משוואות Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

להמשך נזדקק גם לקשר הבא

(3.27) $$\partial_r\mu(r)=4\pi\,r^2\rho$$

כדי להוכיח את חסם בוכדאהל נזדקק למספר הגדרות של משתנים חדשים שיקלו עלינו בהמשך.

(3.28) $$w(r)=\frac{G\mu}{r^3}$$

(3.29) $$x=r^2, r\partial_r=2x\partial_x$$

(3.30) $$f=e^{\nu/2}$$

(3.31) $$y=e^{-\lambda/2}, y^2=1-\frac{2G\mu}{r}$$

כעת נבטא את משוואה (3.22) במשתנים החדשים

(3.32) $$4\pi G\;p=\frac{1}{2r^2}\left(1-\frac{2G\mu}{r}\right)(r\,\partial_r\nu+1)-\frac{1}{2r^2}=-w+2y^2\,\frac{\partial_x f}{f}$$

וכמו כן את ρ באמצעות משוואה (3.21),

(3.33) $$4\pi\,G\rho=2x\partial_x w+3w$$

וניעזר במשוואה (3.23) , מבוטאת במשתנים החדשים,

$$4\pi G\,\partial_x p = -\left(4\pi G\; p + 2x\partial_x w + 3w\right)\frac{\partial_x f}{f} \tag{3.34}$$

נציב את משוואה (3.32) במשוואה (3.34) כדי לקבל משוואה פשוטה עבור f

$$\partial_x\left(2y^2\,\frac{\partial_x f}{f} - w\right) = -\left(2y^2\,\frac{\partial_x f}{f} + 2x\partial_x w + 2w\right)\frac{\partial_x f}{f} \tag{3.35}$$

חישוב הנגזרת ועוד מספר פעולות אלגבריות פשוטות מביאות את (3.35) לצורה הבאה,

$$\left(1-2xw\right)\partial_x^2 f - \left(x\partial_x w + w\right)\partial_x f - \tfrac{1}{2}\,\partial_x w\; f = 0 \tag{3.36}$$

שינוי המשתנים למשתנה z כך ש $\partial_z = y\partial_x$ מעלים את האבר הלינארי בנגזרת של f

$$\partial_z^2 f(z) - \tfrac{1}{2}\,\partial_x w\; f(z) = 0 \tag{3.37}$$

כאשר את האבר השני יש להבין כאילו הוא פונקציה של z .

כעת נוכיח כי $\partial_x w \le 0$. ראשית,

$$r\partial_r w = r\partial_r\left(\frac{G\mu}{r^3}\right) = 4\pi G\rho - 3\frac{G\mu}{r^3} = 4\pi G\rho - \frac{3}{r^3}\,4\pi G\int_0^r \rho(s)s^2 ds \tag{3.38}$$

נזכיר שהנחנו כי $\partial_r\rho \le 0$ ולכן, עבור $s \le r$, $\rho(r) \le \rho(s)$. אם כך נחליף את $\rho(s)$ ב $\rho(r)$ באגף ימין של משוואה (3.38) נקבל אי שוויון

$$r\partial_r w \le 4\pi G\rho - \frac{3}{r^3}\,4\pi G\rho\int_0^r s^2 ds = 0 \tag{3.39}$$

כלומר $\partial_r w \le 0$ ולכן גם $\partial_x w \le 0$.

אם כך, ממשוואה (3.37) נובע כי $\partial_z^2 f \le 0$ ולכן

$$\partial_z f\,(z) \ge \partial_z f\,(r = R) \tag{3.40}$$

מכיוון ש $\partial_z f = y\partial_x f$ נוכל לחשב את $\partial_z f\,(r = R)$ כאשר y נתונה במשוואה (3.31). נזכור את ההגדרה של f ממשוואה (3.30) ונזכור גם ש f רציפה ב r = R כלומר ש $f\,(R_-) = f\,(R_+) = \sqrt{1-\frac{2GM}{R}}$ כאשר השוויון האחרון נובע מכך שמחוץ להתפלגות החומר, הגיאומטריה היא גיאומטריית שוורצשילד. בנוסף גם הנגזרת של f רציפה ב r = R . אם נשווה את הנגזרות ב r = R נקבל

$$\partial_z f\,(r = R) = \frac{GM}{2R^3} = \tfrac{1}{2}\,w(R) \tag{3.41}$$

מאינטגרציה של אי-שוויון (3.40) מתקבל אי השוויון הבא,

$$f(R) - f(0) \geq \frac{GM}{R^3}\int dz = \frac{GM}{R^3}\int_0^R \frac{rdr}{y(r)} \quad (3.42)$$

אי שוויון (3.42) לכן שקול לאי שוויון הבא, בהתחשב בעובדה ש $f(0) > 0$,

$$\sqrt{1-\frac{2GM}{R}} \geq \frac{GM}{R^3}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{1-\frac{2G\mu}{r}}} \geq \frac{GM}{R^3}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{1-\frac{2GM}{R}\frac{r^2}{R^2}}} \quad (3.43)$$

כאשר אי השוויון האחרון נובע מכך ש $\partial_r w \leq 0$ ולכן $\frac{G\mu}{r^3} \leq \frac{GM}{R^3}$, ולכן גם $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2G\mu}{r}}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{R^3}r^2}}$.

נחשב את האינטגרל באגף ימין של (3.43) ונקבל:

$$\sqrt{1-\frac{2GM}{R}} \geq \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{2GM}{R}}\right) \quad (3.44)$$

כלומר

$$1-\frac{2GM}{R} \geq \frac{1}{9} \quad (3.45)$$

ולכן

$$\frac{R}{R_S} \geq \frac{9}{8} \quad (3.45)$$

כמובטח!

תרגילים לפרק 4

1. השלמת ההוכחה של חסם בוכדאהל
   א. הראו במפורש כיצד מקבלים ממשוואות איינשטיין את משוואות TOV שהן משוואות (3.23) , (3.22) , (3.26) ברשימות.
   ב. הראו במפורש כי ממשוואות TOV מתקבלת משוואה (3.36) ברשימות.
   ג. הוכיחו כי אי-שוויון (3.44) אכן מתקבל מאי-שוויון (3.40).

2. מבנה של כוכב יחסותי בעל צפיפות קבועה.

הניחו כי צפיפות האנרגיה של הכוכב קבועה, כי לכוכב סימטריה כדורית וכי רדיוס הכוכב R ומסתו הכללית M.
הניחו גם כי מחוץ לכוכב אין חומר.

   א. חשבו את הלחץ p כפונקציה של r.
   ב. חשבו את רכיבי המטריקה בתוך הכוכב.
   ג. חשבו את הרדיוס המינימלי של הכוכב מתוך הדרישה שהלחץ סופי. חשבו במקרה זה את M כפונקציה של R.
   ד. חשבו את הרדיוס המינימלי של הכוכב מתוך הדרישה שהלחץ קטן מהלחץ המירבי המותר בתורות יחסותיות $p_{max}=\rho$. חשבו במקרה זה את M כפונקציה של R.

3. מבנה של כוכב קרינה יחסותי .

הניחו כי משוואת המצב של החומר בכוכב היא משוואת מצב של קרינה $p = 1/3\ \rho$, כי לכוכב סימטריה כדורית וכי רדיוס הכוכב R ומסתו הכללית M. הניחו גם כי מחוץ לכוכב אין חומר.

   א. חשבו את צפיפות האנרגיה של הקרינה כפונקציה של r. הדרכה: הניחו תלות חזקתית $\rho \sim r^{b}$.
   ב. חשבו את רכיבי המטריקה בתוך הכוכב.
   ג. חשבו את M כפונקציה של R. חשבו מספרית עבור כוכב שמסתו מסת השמש.

4. פתרון נומרי עבור מבנה של כוכב פוליטרופ .

הניחו כי הקשר בין הלחץ לצפיפות האנרגיה בכוכב נתונים על ידי משוואה מהצורה $p = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$, כי לכוכב סימטריה כדורית וכי רדיוס הכוכב R ומסתו הכללית M. הניחו גם כי מחוץ לכוכב אין חומר. פתרו נומרית את משוואות TOV עבור המקרים הבאים:

   א. האינדקס n=0.5 , צפיפות האנרגיה במרכז הכוכב היא $5 \times 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}\ c^2$ והלחץ במרכז הכוכב מקיים $p=\rho$.

ב. האינדקס n=1.5 , צפיפות האנרגיה במרכז הכוכב היא $5 \times 10^{17}\ kg/m^3\ c^2$ והלחץ במרכז הכוכב מקיים $p = \rho$.

עבור כל אחד מהמקרים חשבו נומרית צפיפות האנרגיה, הלחץ ואת M כפונקציה של R.

ג. <u>סעיף בונוס!</u> מה צריכה להיות הצפיפות בליבת הכוכב ומה האינדקס n כך שהכוכב ידמה ככל האפשר לכוכב נויטרונים?

5. משוואת רייצ'אודורי (Raychaudhuri) .

הניחו כי אלמנט האורך של הגיאומטריה נתון על ידי

$$ds^2 = -dudv + g_{ij}dx^i dx^j, i, j = 1, \cdots, D-2 \ .$$

הגדירו את ההתפשטות $\theta = \frac{d}{du}\ln\sqrt{\det g}$ ואת המטריצה חסרת העקבה

$$M^i{}_j = g^{ik}\frac{d}{du}g_{kj} - \frac{1}{D-2}g^{mn}\frac{d}{du}g_{mn}$$

א. כתבו במפורש את רכיב uu של משוואת אינשטיין והראו כי מתקבלת ממנו משוואת רייצ'אודורי

$$\partial_u\theta + \frac{1}{D-2}\theta^2 = -8\pi G\, T_{uu} - \frac{1}{4}TrM^2$$

ב. כתבו במפורש משוואת רייצ'אודורי עבור גיאומטריית שוורצשילד.

ג. כתבו במפורש את משוואת רייצ'אודורי עבור גיאומטריית של יקום FRW.

הדרכה: חשבו את הקואורדינטות u,v כפונקציות של הקואורדינטות המוכרות לכם.