מושגי יסוד וכלים מתמטיים

(א) $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

אלמנט אורך של מרחב-זמן שטוח

$$p^2 = -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

ג'אומטריה רימנית

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}$$

הסכום
הסיכום
מרומז!

ג'אומטריה לא-אוקלידית

3/ $(*)$ $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

מעבר קואורדינטות

$x^0 = t$

$x^1 = r$

$x^2 = \theta$

$x^3 = \varphi$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & r^2 & \\ 0 & & & r^2 \sin\theta \end{pmatrix}$$

4)

$$d\tilde{s}^2 = ds^2$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu}\, d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = g_{\mu\nu}\, \underline{\underline{dx^\mu}}\, \underline{\underline{dx^\nu}}$$

ומכאן נובע ש- $g_{\mu\nu}$

$$\boxed{g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}}$$

5/ $\tilde{g}_{\mu\nu} \longleftrightarrow g_{\mu\nu}$

$$d\tilde{x}^{\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

[illegible]

6/ $\tilde{T}^{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots} = T^{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots}_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots} \times$

$$\times \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_2}}{\partial x^{\nu_2}} \ldots \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_2}} \times$$

אינדקסים עליונים

קונטרווריאנטים

אינדקסים תחתונים - קווריאנטים

7/ $T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} T^{\lambda}{}_{\nu}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$g_{\mu\nu}\, g^{\mu\lambda} = \delta_{\nu}{}^{\lambda}$

$T_{\alpha}{}^{\cdots} = 0$ —

8/

נגזרת קווריאנטית
וסימני קריסטופל

[illegible] — $\partial_\mu A^\mu$ וכו'

על

$$D_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda$$ ולינארי

נגזרת קווריאנטית

$$D_\mu (XY) = X D_\mu Y + (D_\mu X) Y$$

מקיים לייבניץ

ונדרוש ש $A^\mu B_\mu$ סקלר

$$\partial_\mu + \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} + T^\lambda_{[\mu\nu]}$$

Torsion

10/

$$D_\mu\left(A^\nu B_\nu\right) \Longrightarrow$$

$$D_\mu B_\nu = \partial_\mu B_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} B_\lambda$$

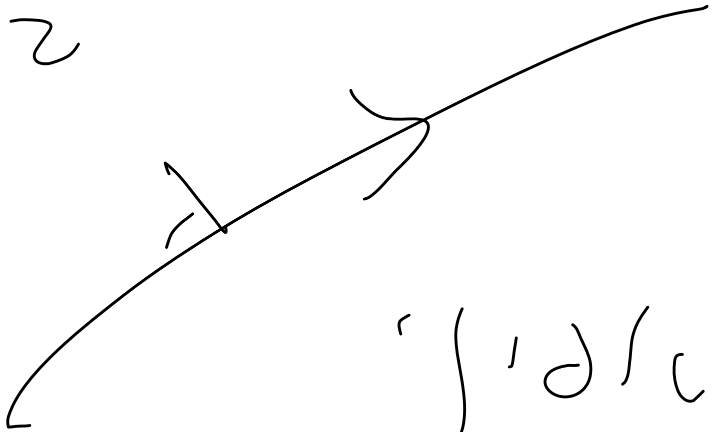
$$D_\mu g_{\nu\lambda} = 0$$

connection - Γ

metric-compatible

עקומות ג'ורדן

1. הווקטור המשיק לעקומה, ג'ורדנית קבוע לאורך העקומה
2. הדרך הקצר* ביותר בין שתי נקודות



$x^\mu(\lambda)$

λ - משתנה אפיני

בערך כל λ פונקציה

לינארית של τ - זמן עצמי

הוקטור - $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

המשיק לעקומה

13/

נוכיח u^m קרוב

הגדרת הקונבולוציה של

u^m לכל לערך הצמדה, מולפייר

$D_\alpha u^m = (9 + \sqcap\ )\ u$

משוואה פונקציה

14/

נגזרת כיוונית

לאורך העקומה,

$$\underbrace{u^\mu D_\mu u^\nu}=0$$

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\right)=0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2x^\nu}{d\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}=0}$$

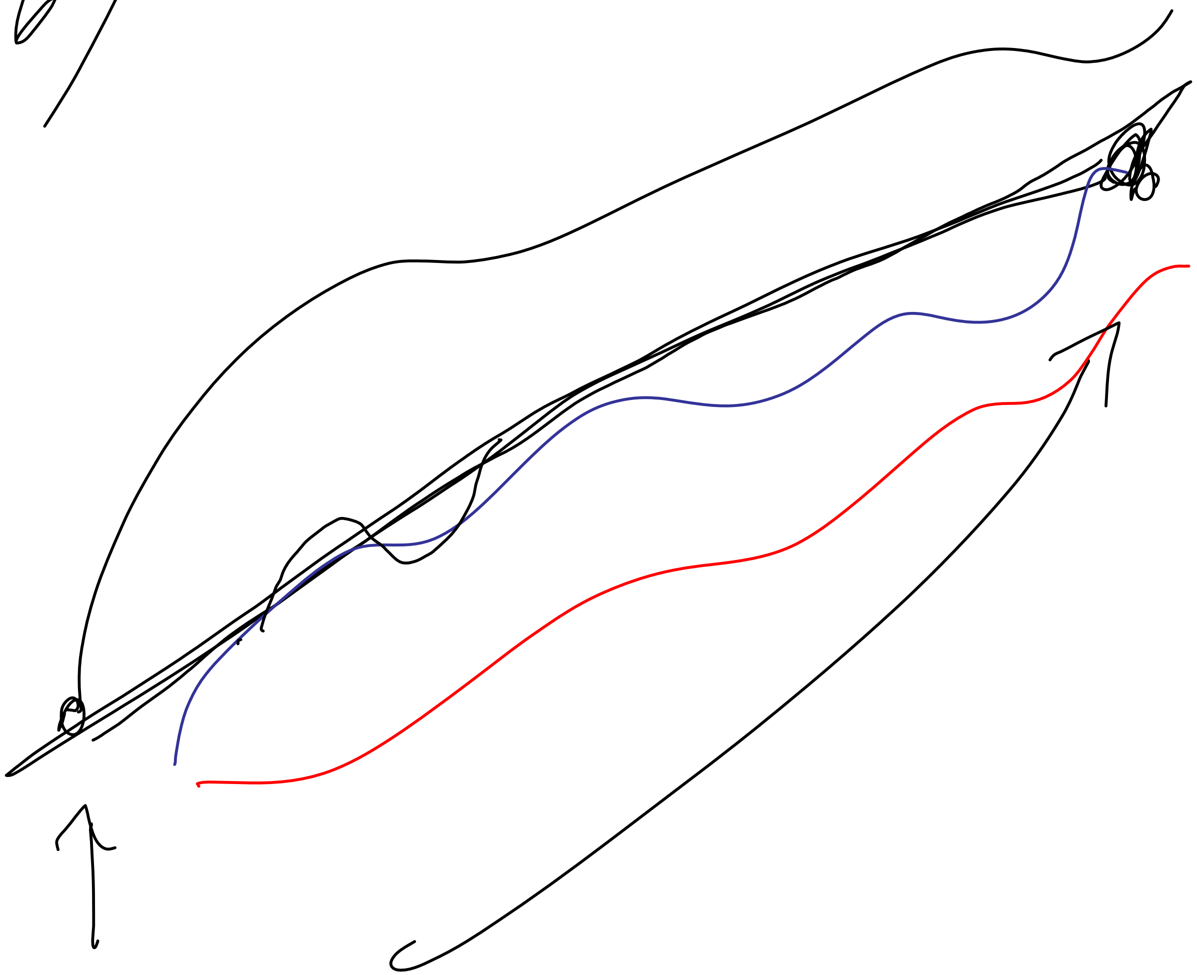
?אורך העקומה

$$s = \int ds = \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

שווה ל
העקומה

$$= \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, u^\mu u^\nu} = L$$

16/



קפילרי

17/

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial u^\mu}L\Big|_{x=\gamma(\lambda)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}L\Big|_{\gamma(\lambda)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\frac{g_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma}} = \frac{\partial_\mu g_{\nu\kappa}u^\nu u^\kappa}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma}}$$

$$\frac{d}{d\lambda} = u^\kappa\partial_\kappa$$

$$\frac{u^k \partial_k}{} \frac{g_{\mu\nu} u^\nu}{\sqrt{g_{\sigma\rho} u^\rho u^\sigma}} = \frac{\partial_\mu g_{\nu k} u^\nu u^k}{2\sqrt{g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma}}$$

$$\lambda = \tau$$

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

$$\frac{}{g^{\mu\alpha} \sqrt{g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma}} \;!$$

19/

$$\Rightarrow \frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma = 0$$

ההנחה הסופית של תורת

המסלת הגללית

שגופים "אופשיים" נעים על

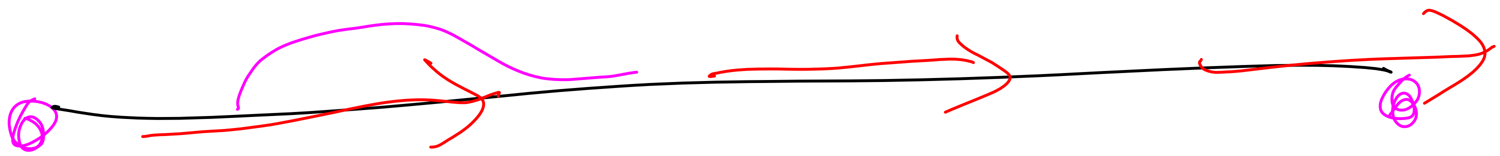
עקומת שעווגגזים

20/

יולפשייף" - שלו פוטלים
פאולר פרק לנגזב

פ'ש כוחות עוצרים
כוח $f = \rho \frac{dx^5}{dt} \frac{dx^4}{dt} \mu g + \frac{d^2x}{dt^2}$
[illegible] מהי הגלי הילך של ניוטוני

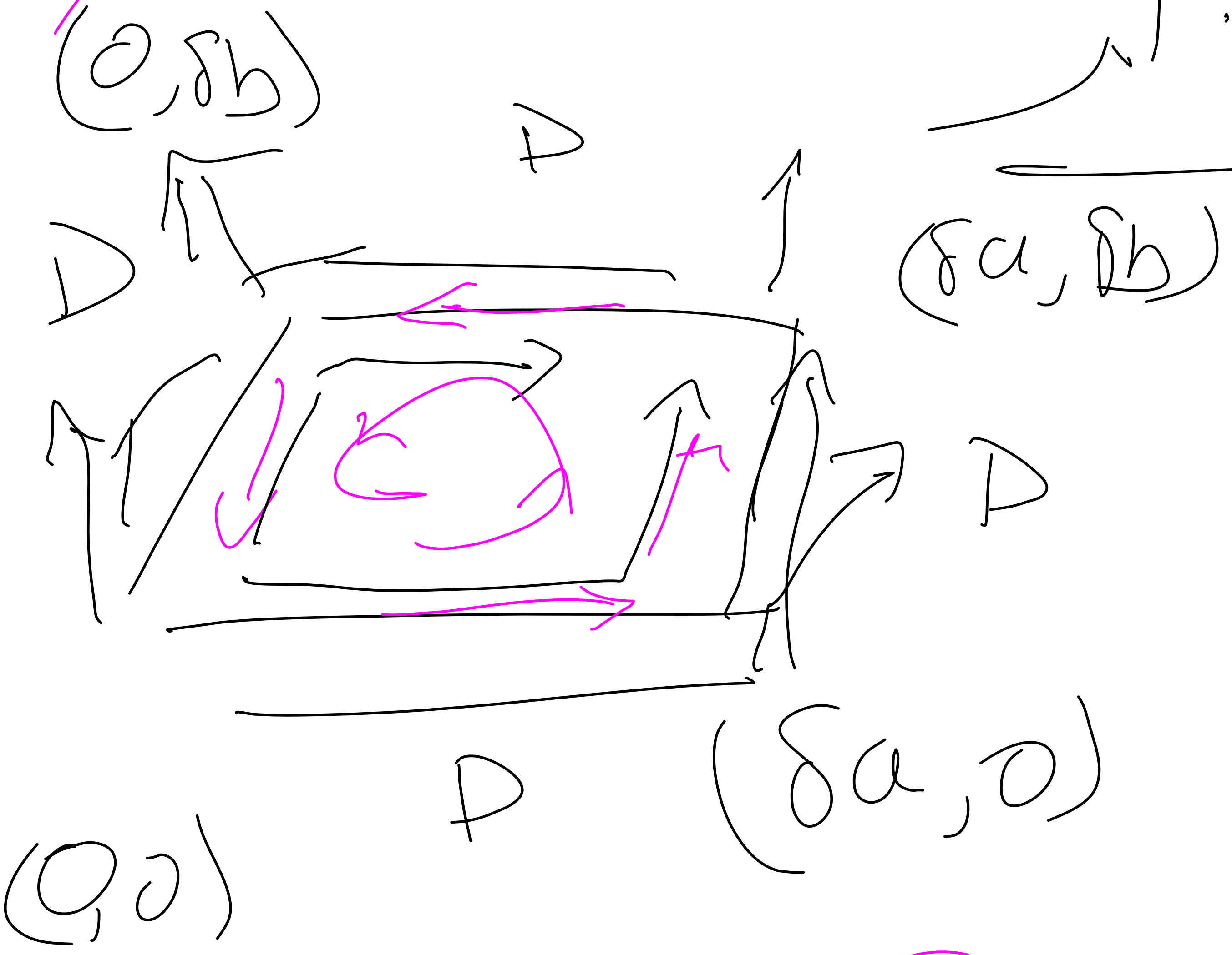
21)



?קן יו מתעלם

22

עקמומית



$$\delta V^{\mu} = \delta a^{\alpha}\, \delta b^{\beta} \left[D_{\alpha}, D_{\beta} \right] V^{\mu}$$

$$[D_\alpha, D_\beta] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu$$

טנזור רימן

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\nu\lambda}$$

24/

אם $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = 0$

המרחב שטוח ; ניתן למצוא

קואורדינטות בהן

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

25/

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}.$$

26/ D

$$\frac{1}{2} D(D-1)$$

$$\frac{1}{12} D^2(D^2-1)$$