שאלה 4 תורת הכבידה:

לכסון מטריצה ע"י בחירת קואורדינטות

נתון אלמנט האורך: $ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+2q^2(t)dx\,dy+dz^2$ מצא קו' בהן המטריקה אלכסונית.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\cdot(-q^2)+R_2\to R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q^4 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\cdot\left(\frac{1}{1-q^4}\right)\cdot(-q^2)+R_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\tilde{S}^2=-d\tilde{t}^2+(1-q^4)d\tilde{x}^2+d\tilde{y}^2+d\tilde{z}^2 \leftarrow$$ בכדי לקבל

$$x\longrightarrow\tilde{x}$$

נניח: $x(\tilde{x},y,t)=\tilde{x}+F(y,t)$

$$dx=d\tilde{x}+F'(y)dy=d\tilde{x}+\frac{\partial F(y)}{\partial y}dy$$

$$dx^2=d\tilde{x}^2+F'(y)^2dy^2+2F'(y)d\tilde{x}dy$$

$$d\tilde{S}^2=-dt^2+d\tilde{x}^2+F'(y)^2dy^2+2F'(y)d\tilde{x}dy+dy^2+2q^2(t)(d\tilde{x}+F'(y)dy)dy+d\tilde{z}^2$$

$$d\tilde{S}^2=-dt^2+d\tilde{x}^2+dy^2(F'(y)^2+1+2q^2(t)F(y))+dz^2+d\tilde{x}dy(2F'(y)+2q^2(t))$$

$$2F'(y)+2q^2(t)=0\Rightarrow F'(y)=-q^2(t)\Rightarrow F(y)=-q^2(t)\cdot y$$

$$\Rightarrow d\tilde{S}^2 = -dt^2 + d\tilde{x}^2 + dy^2\left(1-\varepsilon^4(t)\right) + dz^2$$

והמטריקה:

$$\begin{array}{c|cccc} & t & \tilde{x} & y & z \\ \hline t & & & & \\ \tilde{x} & & & & \\ y & & & & \\ z & & & & \end{array}\quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1-\varepsilon^4 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \tilde{y} + F(x)$$

* באותו אופן הייתי יכולה ללכסן את המטריצה הבא: אנחנו נקבל:

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1-\varepsilon^4 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \tilde{x} + F(y)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Rightarrow R_3]{R_2\cdot(-\varepsilon^2)+R_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow R_2]{R_3\cdot\left(\frac{1}{1-\varepsilon^4}\right)\cdot(-\varepsilon^2)+R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$