כבידה 2 - פתרון שאלה 9

(1) צריך לחשב את $T^{\mu\nu}$ עבור קרינה אלקטרומגנטית:

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho$$

$$S_{EM} = \int d^4x \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right)$$

חסר בשאלה,
נראה לי חשוב
לסעיף ג'

נעשה וריאציה על $g^{\mu\nu}$ ונמצא את הווריאציה בפעולה:

$$\delta S_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x\left[\delta(\sqrt{-g})F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \sqrt{-g}\,\delta(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma})\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^4x\left[\delta(\sqrt{-g})F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \sqrt{-g}\,\delta(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^4x\left[\delta(\sqrt{-g})F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,\delta(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right]$$

בהרצאה ראינו ש-:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

נחקור את האיבר השני:

$$F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,\delta(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) = F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,g^{\nu\sigma}\delta g^{\mu\rho} + F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma}$$

מחליף באיבר הראשון $\rho \leftrightarrow \nu$

מחליף באיבר השני $\mu \leftrightarrow \sigma$

$$= F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\,g^{\rho\sigma}\delta g^{\mu\nu} + F_{\sigma\nu}F_{\rho\mu}\,g^{\sigma\rho}\delta g^{\mu\nu}$$

$\delta g^{\nu\mu} = \delta g^{\mu\nu}$

$F_{\rho\mu} = -F_{\mu\rho}$

$F_{\sigma\nu} = -F_{\nu\sigma}$

$$= (F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} + F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\,g^{\sigma\rho})\,\delta g^{\mu\nu} = (F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} + F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma})\,\delta g^{\mu\nu}$$

$$= 2F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma}\,\delta g^{\mu\nu}$$

אז קיבלנו

$$\delta S_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + 2F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma}\right)\delta g^{\mu\nu}$$

ומכאן נוכל לזהות:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}}$$

(2) צריך לחשב את $T^{\mu\nu}$ עבור נוזל אידיאלי שמשוואת המצב שלו היא משוואת המצב של קרינה. $T^{\mu\nu}$ של נוזל אידיאלי:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}p$$

עבור קרינה $p = \frac{1}{3}\rho$:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{4}{3}U^\mu U^\nu\rho + \frac{1}{3}g^{\mu\nu}\rho}$$

(3) צריך למצוא קשר בין הסעיפים הקודמים. נתבונן על $T^\mu{}_\nu$ של הסעיף הקודם:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{4}{3}U^\mu U_\nu\rho + \frac{1}{3}\delta^\mu_\nu\rho$$

במערכת המנוחה של הנוזל:

$$-1 = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \Rightarrow U^\mu = \left(\sqrt{\frac{-1}{g_{00}}}, 0, 0, 0\right) \Rightarrow U^0 = \sqrt{\frac{-1}{g_{00}}}$$

$$U_\nu = g_{\mu\nu}U^\mu = g_{0\nu}\sqrt{\frac{-1}{g_{00}}} \Rightarrow U_0 = g_{00}\sqrt{\frac{-1}{g_{00}}} = \sqrt{-g_{00}}$$

ולכן:

$$T^0{}_0 = \frac{4}{3}U^0U_0\rho + \frac{1}{3}\delta^0_0\rho = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{-1}{g_{00}}}\sqrt{-g_{00}}\,\rho + \frac{1}{3}\rho$$

$$= \frac{4}{3}\cdot(-1)\rho + \frac{1}{3}\rho = -\rho$$

מצד שני, לפי סעיף א:

$$T^0{}_0 = F^{0\sigma}F_{0\sigma} - \frac{1}{4}\delta^0_0F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F^{0\sigma}F_{0\sigma} - \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

כלומר קיבלנו את הקשר:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - F^{0\mu}F_{0\mu}}$$

האם זה הגיוני? ידוע ש-:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

$$F^{0\mu}F_{0\mu} = -\vec{E}^2$$

כלומר קיבלנו

$$\rho = \frac{1}{4}\cdot 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - (-\vec{E}^2) = \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) + \vec{E}^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}$$

☺

(4) צריך להוכיח את השימור של $T^{\mu\nu}$ בשני המקרים.

עבור המקרה הראשון:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu\left(F^{\mu\sigma}F^\nu{}_\sigma - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) = 0$$

הסיבות לשוויון האחרון:

(1) $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ - Metric compatible connection

(2) $\nabla_\mu F^{\sigma\mu} = 0$ - משוואות מקסוול בהיעדר מקורות ($\nabla_\mu F^{\sigma\mu} = J^\sigma$).

עבור המקרה השני:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu\left(\frac{4}{3}U^\mu U^\nu\rho + \frac{1}{3}g^{\mu\nu}\rho\right) \underset{\nabla_\mu g^{\mu\nu}=0}{=} \frac{4}{3}\rho\,\nabla_\mu(U^\mu U^\nu)$$

$$= \frac{4}{3}\rho\left(U^\nu\underbrace{\nabla_\mu U^\mu}_{=0\ \text{משוואת הרציפות}} + \underbrace{U^\mu\nabla_\mu U^\nu}_{=0\ \text{המשוואה הגיאודזית}}\right) = 0$$