תרגול 10

גדעון אילני

נושאי התרגול

1. משוואת המילטון יעקובי
2. משתני פעולה זווית במימד אחד

1 משוואת המילטון יעקובי

כאשר נתון לנו המילטוניאן של מערכת $H\left(q_i, p_i\right)$, נרצה למצוא טרנספורמציה קנונית מהצורה

$$S = F_2\left(q_i, P_i, t\right),$$

כך שההמילטוניאן במערכת החדשה יהיה זהותית אפס

$$K\left(Q_i, P_i, t\right) = 0.$$

משוואות המילטון בקואורדינטות החדשות הן

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \implies Q_i = \beta_i = \text{const}.$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \implies P_i = \alpha_i = \text{const}.$$

מה הפונקציה S צריכה לקיים? היא צריכה לייצר את הטרנספורמציה, לכן

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \implies \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}.$$

היא גם צריכה לקיים את התנאי שמקשר בין ההמילטוניאן הישן לחדש

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t},$$

ומכיוון שההמילטוניאן החדש שווה לאפס נקבל

$$H\left(\left\{q, \frac{\partial S}{\partial q}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

- זו משוואה דיפרנציאלית חלקית אחת ממנה נקבל את S (אם נוכל לפתור, למשל על ידי הפרדת משתנים) כפונקציה של $N+1$ משתנים $S=S\left(\{q\},t\right)$.
- בפתרון יהיו $N+1$ קבועי אינטגרציה $\{\gamma_1\ldots\gamma_{N+1}\}$, אבל אחד מהם לא חשוב מכיוון שהוספת קבוע לS לא משנה את הפיסיקה (שנובעת מנגזרות של S). אז בפועל נשארים עם N קבועי אינטגרציה. הבחירה הסטנדרטית היא לבחור שקבועי התנועה יהיו שווים לתנעים הקבועים במערכת החדשה, כלומר ל$P_i=\gamma_i$. לפעמים מסתבר שיותר נח לבחור $P_i=\alpha_i\left(\{\gamma\}\right)$, כלומר שהתנעים הם איזו פונקציה של קבועי האינטגרציה. בכל מקרה בסוף התהליך אנחנו אמורים להישאר עם פונקציה $S\left(\{q,\alpha\},t\right)$.
- אחרי שמוצאים את S, הפתרון הפיסיקלי יתקבל על ידי פתרון משוואות התנועה

$$\beta_i=\frac{\partial S\left(\{q,\alpha\},t\right)}{\partial\alpha_i}=\beta_i\left(\{q,\alpha\},t\right),$$

שימו לב שאלו אינן משוואות דיפרנציאליות. את הקשר אפשר להפוך בשביל לקבל

$$q_i=q_i\left(\{\beta,\alpha\},t\right),$$

ואת התנע נמצא מהמשוואה

$$p_i=\frac{\partial S\left(\{q,\alpha\},t\right)}{\partial q_i}=p\left(\{q\left(\beta,\alpha,t\right),\alpha\},t\right)=p\left(\{\beta,\alpha\},t\right).$$

למה קראנו לפונקציה היוצרת הזו S? אם נגזור אותה בזמן נקבל

$$\frac{dS}{dt}=\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial S}{\partial t}=\sum_i p_i\dot{q}_i-H=L,$$

כלומר

$$S=\int L\,dt$$

S היא הפעולה עליה דיברנו בעיקרון הפעולה המינימלית.

דוגמא

אוסצילטור הרמוני

1. רשמו את משוואת המילטון-יעקובי עבור אוסצילטור הרמוני פשוט במימד אחד. מצאו פתרון עבור S. (רמז: נצלו את העובדה ש- $H=E$ ואינו תלוי מפורשות בזמן כדי להפריד את התלות ב-t כפי שהראנו בכיתה. כדאי להשאיר את הביטוי שתקבלו עבור W כאינטגרל בשלב זה).
2. השתמשו במשוואת הטרנספורמציה הקנונית הנותרת כדי למצוא את הפתרון עבור הקואורדינטה המקורית $q(t)$. (רמז: $\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}dx=\arcsin x$).

פתרון

א. ההמילטוניאן הוא

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{\mathrm{m}\omega^2}{2}x^2,$$

משוואת המילטון-יעקובי היא

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{\mathrm{m}\omega^2}{2}x^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

נפריד משתנים

$$S=W(x)-Et,$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש$H=E$ נשמר בזמן בשביל לקבל ב"חינם" את קבוע האינטגרציה $\alpha_1=E$, ונקבל

$$\frac{1}{2m}W'^2+\frac{\mathrm{m}\omega^2}{2}x^2=E.$$

את W נמצא ע"י אינטגרציה

$$W=\int\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}dx,$$

ולפיכך

$$S(x,E,t)=\int\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}dx-Et.$$

ב. משוואת התנועה המתקבלת ממשוואת הטרנספורמציה הנותרת היא

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial E}=\int\frac{mdx}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}}-t=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{m}\omega^2}{2E}x^2}}-t=\frac{1}{\omega}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}-t,$$

כאשר הגדרנו $u=x\sqrt{\frac{\mathrm{m}\omega^2}{2E}}$. הפתרון הוא

$$t+\beta=\frac{1}{\omega}\mathrm{arcsin}u,$$

כלומר

$$x=\sqrt{\frac{2E}{\mathrm{m}\omega^2}}\mathrm{sin}\omega(t+\beta),$$

הפתרון הרגיל של אוסצילטור הרמוני, כאשר המשתנים הקנוניים הקבועים E ו- β נקבעים לפי תנאי ההתחלה.

דוגמא

חלקיק מחליק על שפת קונוס:

נכתוב את הלגראנג'יאן בקואורדינטות גליליות, כאשר יש לנו אילוץ $r/z=\tan\left(\alpha_0\right)$, הולונומי. הלגראנג'יאן יהיה

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)-mgz,$$

נגדיר $\varepsilon\equiv1/\tan\alpha_0$, ואז

$$z=\varepsilon r,$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(1+\varepsilon^2\right)+r^2\dot{\phi}^2\right)-mg\varepsilon r.$$

נמצא את התנעים הצמודים ואת ההמילטוניאן

$$p_r=m\dot{r}\left(1+\varepsilon^2\right)\implies\dot{r}=\frac{p_r}{m\left(1+\varepsilon^2\right)},$$

$$p_\phi=mr^2\dot{\phi}\implies\dot{\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2},$$

$$H=p_r\dot{r}+p_\phi\dot{\phi}-L=\frac{p_r^2}{2m\left(1+\varepsilon^2\right)}+\frac{p_\phi^2}{2mr^2}+mg\varepsilon r.$$

עכשיו נחפש S כזו שתיתן לנו $K=0$,

$$H+\frac{\partial S}{\partial t}=0,$$

כאשר

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i.$$

אז משוואת המילטון יעקובי במקרה הזה היא

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2}{2m\left(1+\varepsilon^2\right)}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2}{2mr^2}+mg\varepsilon r+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

איך אפשר לפתור אותה? על ידי הפרדת משתנים. נניח שקיים פתרון לS מהצורה

$$S\left(r,\phi,t\right)=R\left(r\right)+\Phi\left(\phi\right)+T\left(t\right),$$

ונציב במשוואה, נקבל

$$\frac{\left(R'\right)^2}{2m\left(1+\varepsilon^2\right)}+\frac{\left(\Phi'\right)^2}{2mr^2}+mg\varepsilon r=-T'.$$

מכיוון שאגף שמאל לא תלוי בכלל בt ואגף ימין תלוי רק בt חייב להיות נכון ש

$$-T'\left(t\right)=\text{const}=\alpha_1\implies T\left(t\right)=-\alpha_1 t.$$

נציב את זה במשוואה ונמשיך להפריד משתנים

$$\left(\Phi'\right)^2=2mr^2\alpha_1-2m^2g\varepsilon r^3-\frac{r^2\left(R'\right)^2}{\left(1+\varepsilon^2\right)},$$

כך שנקבל

$$\Phi\left(\phi\right)=\alpha_2\phi.$$

ונשארנו עם משואה עבור R

$$R\left(r\right)=\sqrt{1+\varepsilon^2}\int\frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2-2m^2g\varepsilon r^3-\alpha_2^2}}{r}dr,$$

אז עכשיו בעצם מצאנו את S (עד כדי אינטגרל שלא עשינו עדיין). מכאן אפשר למצוא את משוואות התנועה שיגדירו לנו את הβות

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}=m\sqrt{1+\varepsilon^2}\int\frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1-2m^2g\varepsilon r-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr-t\implies r\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,t\right),$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}=\phi-\alpha_2\sqrt{1+\varepsilon^2}\int\frac{1}{r^2\sqrt{2m\alpha_1-2m^2g\varepsilon r-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr\implies\phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,r\right),$$

$$\implies\phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,t\right)$$

אחרי שנחשב את האינטגרלים נוכל בעיקרון להפוך את הקשר ולפתור לגמרי עבור התפתחות המערכת בזמן.

2 משתני פעולה זווית במימד אחד

עבור מערכות עם מחזוריות, ושימור אנרגיה, מועיל לבחור בטרנספורמציה קנונית $\{q_i, p_i\} \to \{\Psi, I\}$ כזו בה ההמילטוניאן החדש יהיה קבוע שהוא פונקציה של התנע החדש בלבד $K = K(I)$. במקרה כזה משוואות המילטון ייתנו לנו

$$\dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \Psi} = 0 \implies I = \text{const}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial K}{\partial I} = \omega(I) = \text{const} \implies \Psi = \omega(I)\, t + \omega_0.$$

נייצר את הטרנספורמציה בעזרת פונקציה יוצרת מסוג F_1, $W(q, \Psi)$. הדיפרנציאל של W הוא

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q} dq + \frac{\partial W}{\partial \Psi} d\Psi = pdq - Id\Psi.$$

אם נעשה אינטגרל על dW לאורך מחזור שלם של התנועה נקבל

$$\oint dW = \oint pdq - I \oint d\Psi.$$

אם נדרוש שהפונקציה היוצרת תהיה מחזורית ב-Ψ ובq. נקבל את הגדרת משתנה הפעולה, I

$$\oint dW = 0 = \oint pdq - I \oint d\Psi \implies I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq,$$

כאשר הגדרנו בנוסף שבכל מחזור, מִשְׁתָּנֶה-הזווית-Ψ גדל ב-2π.
I תמיד יהיה פונקציה של $E = K$, ואז אפשר להפוך את הקשר בשביל למצוא את $K(I)$. אם אי אפשר להפוך את הקשר, עדיין אפשר למצוא את התדירות המתאימה על ידי חישוב $\omega(I(E)) = \omega(E) = \dot{\Psi} = \left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)^{-1}$. פרקטית התלות של ω ב-E יותר מעניינת מהתלות ב-I.
עיקר הכח של הפורמליזם הזה הוא במציאת תדירויות של תנועה מחזורית ללא צורך לפתור את כל הבעיה קודם.

דוגמא

מטוטלת

מטוטלת יכולה לנוע בשני סוגים של תנועה מחזורית, אחת היא תנועה סגורה, שמגדירה שטח סגור במרחב הפאזה. זה קורה כאשר המטוטלת עושה אוסילציות. אם יש למטוטלת מספיק אנרגיה בשביל להגיע לנקודה $\theta = \pi$ עם אנרגיה קינטית עודפת, היא פשוט תעשה מעגלים שלימים ללא הפסקה. זה מקביל למסלול פתוח במרחב הפאזה אבל כזה בו p הוא פונקציה מחזורית ב-q.
נתמקד במקרה הרגיל של תנועה אוסצילטורית בזוויות קטנות (המקרה הכללי פתיר בעזרת פונקציות אליפיטיות). ההמילטוניאן הוא

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{\theta^2}{2},$$

כאשר הנחנו $m = 1$, והגדרנו $\omega \equiv g/l$ התדירות הטבעית של המערכת. אם נחשב את משתנה הפעולה

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{1}{2\pi} \int\int dpdq$$

אז משתנה הפעולה יהיה שווה לשטח של האליפסה המוגדרת על ידי ההמילטוניאן באנרגיה נתונה

$$1=\frac{p^2}{2E}+\frac{\omega^2\theta^2}{2E}$$

חלקי 2π. הצירים הראשיים של האליפסה הם $\theta_{max}=\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$, ו$p_{max}=\sqrt{2E}$. אז השטח במרחב הפאזה הוא $\pi p_{max}\theta_{max}$ ומשתנה הפעולה הוא

$$I=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi 2E}{\omega}=\frac{E}{\omega}.$$

מכאן,

$$K=I\omega,$$

ועכשיו אפשר למצוא את התדירות המתאימה

$$\dot{\Psi}=\frac{\partial K}{\partial I}=\omega,\implies\Psi=\omega t.$$

כלומר כפי שידענו התדירות של התנועה היא התדירות הטבעית.
כמו בהמילטון יעקובי, פתרון הבעיה המקורית נעוץ במציאת הפונקציה שיוצרת את הטרנספורמציה. נמצא את הפונקציה $W\left(\theta,\Psi\right)$. ראינו שהיא שווה ל

$$W=\int pdq-I\int d\Psi=\int\sqrt{2E-\omega^2\theta^2}d\theta-I\Psi.$$

נגדיר $u=\frac{\omega\theta}{\sqrt{2E}}$, ונקבל

$$W=\frac{2E}{\omega}\int\sqrt{1-u^2}du-I\Psi,$$

$$=\frac{E}{\omega}\left(\arcsin\left(u\right)-\Psi+u\sqrt{1-u^2}\right).$$

בשביל שW תהיה מחזורית בΨ אנחנו צריכים לדרוש ש$u=\sin\Psi$, כלומר

$$E=\frac{\omega^2\theta^2}{2u^2}=\frac{\omega^2\theta^2}{2\sin^2\left(\Psi\right)},$$

ומכן ישירות

$$\theta\left(t\right)=\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\sin\left(\omega t\right)$$

את הקשר הזה נציב בחזרה לW ונקבל

$$W=\frac{E}{\omega}u\sqrt{1-u^2}=\frac{\omega^2\theta^2}{2u^2}\frac{1}{\omega}u\sqrt{1-u^2}=\frac{\omega\theta^2}{2u}\sqrt{1-u^2}=$$

$$W = \frac{\omega\theta^2}{2}\cot(\Psi) \, .$$

עכשיו נוכל לחשב את p, בעזרת שימוש במשוואות של F_1,

$$p = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \omega\theta\cot(\Psi) = \omega\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cot(\Psi)\sin(\Psi) =$$

$$p = \sqrt{2E}\cos(\omega t) \, ,$$

כצפוי.