תרגול 12

גדעון אילני

נושאי התרגול

1. מומנט ההתמד וצירים ראשיים
2. טרנספורמציות סיבוב, זוויות אוילר ולגראנג'יאן של גוף קשיח

1 מומנט ההתמד וצירים ראשיים

אם נגדיר ציר סיבוב העובר במרכז המסה של גוף, האנרגיה הקינטית של הגוף תינתן על ידי

$$T = T_{\text{rot}} + T_{\text{tra}},$$

כאשר $T_{\text{tra}} = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} V_{\text{cm}}^2$, ו

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\right)^2 = \frac{1}{2} \omega_\alpha I_{\alpha\beta} \omega_\beta.$$

הטנזור $I_{\alpha\beta}$, הוא טנזור האינרציה וברכיבים הוא שווה ל

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left(\boldsymbol{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i,\alpha} r_{i,\beta}\right).$$

עבור $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, ערכים אופייניים יהיו למשל,

$$I_{11} = \sum_i m_i \left(\boldsymbol{r}_i^2 - r_{i,1}^2\right) = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2\right) = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right),$$

$$I_{23} = -\sum_i m_i r_{i,2} r_{i,3} = -\sum_i m_i y_i z_i.$$

אם נתונה צפיפות מסה $\rho(\boldsymbol{r})$, הסכום הופך לאינטגרל

$$\sum_i m_i \to \int \rho(\boldsymbol{r})\ dV,$$

$$I_{\alpha\beta}=\int\rho\left(\boldsymbol{r}\right)\left(\boldsymbol{r}^{2}\delta_{\alpha\beta}-r_{\alpha}r_{\beta}\right)dV.$$

אחרי שכתבנו את הטנזור ברכיבים ברור שהוא טנזור סימטרי $I_{\alpha\beta}=I_{\beta\alpha}$.
כמו כן תמיד אפשר ללכסן אותו ובכך בעצם לעבור למערכת הצירים הראשיים, על ידי סיבוב מערכת הצירים (כלומר על ידי טרנספורמציה אורתוגונלית $\boldsymbol{U}$).

משפט הציר המוסט

אם אנחנו יודעים את טנזור האינרציה של גוף סביב מרכז המסה שלו, אנחנו יכולים למצוא את את טנזור האינרציה מסביב לכל נקודה אחרת המוסטת ממרכז המסה בווקטור $\boldsymbol{a}$ על ידי הקשר

$$I_{\alpha\beta}^{(a)}=I_{\alpha\beta}^{(\text{cm})}+M\left(\boldsymbol{a}^{2}\delta_{\alpha\beta}-a_{\alpha}a_{\beta}\right)$$

הוכחה

הקשר בין וקטור המיקום של אלמנט מסה במערכת המוסטת לבין זו במערכת מרכז המסה הוא

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a},$$

מכאן שטנזור האינרציה החדש הוא

$$I_{\alpha\beta}=\sum_{i}m_{i}\left(\boldsymbol{r}_{i}'^{2}\delta_{\alpha\beta}-r'_{i,\alpha}r'_{i,\beta}\right)=\sum_{i}m_{i}\left(\left(\boldsymbol{r}_{i}-\boldsymbol{a}\right)^{2}\delta_{\alpha\beta}-\left(r_{i,\alpha}-a_{\alpha}\right)\left(r_{i,\beta}-a_{\beta}\right)\right),$$

$$=\sum_{i}m_{i}\left(\boldsymbol{r}_{i}^{2}\delta_{\alpha\beta}-r_{i,\alpha}r_{i,\beta}\right)+\sum_{i}m_{i}\left(\left(\boldsymbol{a}^{2}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r_{i}}\right)\delta_{\alpha\beta}-a_{\alpha}a_{\beta}+r_{i,\alpha}a_{\beta}+a_{\alpha}r_{i,\beta}\right)=$$

$$=I_{\alpha\beta}^{(\text{cm})}+\sum_{i}m_{i}\left(\boldsymbol{a}^{2}\delta_{\alpha\beta}-a_{\alpha}a_{\beta}\right)+\sum_{i}m_{i}\left(-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r_{i}}\delta_{\alpha\beta}+r_{i,\alpha}a_{\beta}+a_{\alpha}r_{i,\beta}\right).$$

עכשיו נזכור כי $\boldsymbol{a}$ הוא וקטור קבוע, ו-$\boldsymbol{r}_{i}$ הוא במערכת קואורדינטות בה הראשית היא במרכז המסה, לכן

$$=-\boldsymbol{a}\delta_{\alpha\beta}\sum_{i}m_{i}\cdot\boldsymbol{r_{i}}+\sum_{i}m_{i}r_{i,\alpha}a_{\beta}+\sum_{i}m_{i}a_{\alpha}r_{i,\beta}=M_{tot}\left(-\boldsymbol{a}\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\text{cm}}+a_{\beta}r_{\text{cm},\alpha}+a_{\alpha}r_{\text{cm},\beta}\right)=0,$$

$$I_{\alpha\beta}=I_{\alpha\beta}^{(\text{cm})}+M\left(\boldsymbol{a}^{2}\delta_{\alpha\beta}-a_{\alpha}a_{\beta}\right).$$

דוגמא

נתונים 3 גופים נקודתיים במסה m כל אחד במיקום

$$\boldsymbol{r}_{1}=\left(1,-1,1\right),$$

$$\boldsymbol{r}_2 = (0,1,1)\,,$$

$$\boldsymbol{r}_3 = (1,1,0)\,.$$

נמצא את טנזור האינרציה: במקרה שלנו $m_i = m$ וכן

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i z_i^2 = 2,\ \sum_i y_i^2 = 3.$$

$$I_{11} = m\sum_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) = 5m,$$

$$I_{22} = m\sum_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) = 4m,$$

$$I_{33} = m\sum_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = 5m,$$

$$I_{12} = I_{21} = -m\sum_i \left(x_i y_i\right) = -m\left(-1+1\right) = 0,$$

$$I_{23} = I_{32} = -m\sum_i \left(y_i z_i\right) = -m\left(-1+1\right) = 0,$$

$$I_{13} = I_{31} = -m\sum_i \left(x_i z_i\right) = -m,$$

$$I_{\alpha\beta} = m\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

אם נרצה לעבור למערכת הצירים הראשיים נלכסן את המטריצה ונמצא וקטורים עצמיים - הם יגדירו לנו את כיווני הצירים הראשיים.

שאלה

הראו כי עבור סביבון סימטרי ($I_1 = I_2 \neq I_3$), אם $\hat{x}_1$ו$\hat{x}_2$ הם צירים ראשיים המתאימים לI_1 וI_2 בהתאמה, אזי הציר $\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_2\right)$ הוא גם ציר ראשי.

פתרון

עבור סביבון סימטרי $I_1 = I_2$, לכן

$$\sum_i m_i \left(x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2\right) = \sum_i m_i \left(x_{i,1}^2 + x_{i,3}^2\right) \implies \sum_i m_i x_{i,2}^2 = \sum_i m_i x_{i,1}^2,$$

וחוץ מזה האיברים מחוץ לאלכסון מתאפסים לכן

$$\sum_i m_i x_{i,1} x_{i,2} = \sum_i m_i x_{i,1} x_{i,3} = \sum_i m_i x_{i,3} x_{i,2} = 0.$$

נחשב את הטנזור במערכת חדשה המוגדרת על ידי הכיוון

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_1 + \hat{x}_2\right).$$

אנחנו צריכים כמובן לבחור עוד 2 צירים, את הציר השלישי נשאיר (כי בשאלה לא השתמשו בו)

$$\hat{X}_3 = \hat{x}_3,$$

ונבחר את הכיוון השני כך שיהיה מאונך לשני הכיוונים האחרים

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_1 - \hat{x}_2\right).$$

מכיוון שלא שינינו את $\hat{X}_3$ ברור שזה עדיין ציר ראשי. נחשב את איברי הטנזור

$$I'_{11} = \sum_i m_i \left(X_{2i}^2 + X_{3i}^2\right) = \sum_i m_i \left(\frac{1}{2}\left(x_{1i}^2 - 2x_{1i}x_{2i} + x_{2i}^2\right) + x_{3i}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i x_{1i}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i x_{2i}^2 - \sum_i m_i x_{1i} x_{2i} + \sum_i m_i x_{3i}^2 =$$

$$= \sum_i m_i \left(x_{2i}^2 + x_{3i}^2\right) = I_1.$$

באופן דומה ניתן להראות ש$I'_{22} = I_2$, $I'_{33} = I_3$. נראה שהאיברים מחוץ לאלכסון מתאפסים

$$I'_{12} = -\sum_i m_i X_{1i} X_{2i} = -\frac{1}{2}\sum_i m_i \left(x_{1i} - x_{21}\right)\left(x_{1i} + x_{2i}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i x_{2i}^2 - \sum_i m_i x_{1i}^2\right] = 0,$$

$$I'_{13} = -\sum_i m_i X_{1i} X_{3i} = -\frac{1}{2}\sum_i m_i \left(x_{1i} + x_{21}\right) x_{3i} = -\frac{1}{2}\left[\sum_i m_i x_{1i} x_{3i} + \sum_i m_i x_{2i} x_{3i}\right] = 0.$$

ובאופן דומה אפשר להראות ששאר האיברים מתאפסים. אז קיבלנו טנזור אינרציה מלוכסן, כלומר אנחנו עדיין במערכת של צירים ראשיים. זה כמובן ברור אינטואיטיבית, עבור סביבון סימטרי אפשר לבחור כל שני כיוונים מאונכים כאשר שניהם מאונכים לציר הסימטריה.

שאלה

גוף המורכב משתי דיסקיות

גוף מורכב משתי דיסקיות במסה m, בצפיפויות אחידות, עם רדיוסים שונים $r_1 = R$, $r_2 = 2R$. הדיסקיות מחוברות במרכזן בעזרת מוט קשיח חסר מסה, המאונך לשתיהן.

1. חשבו את טנזור ההתמד, בצירים ראשיים.
2. מה צריך להיות המרחק בין הדיסקיות בשביל שנקבל סביבון ספירי ($I_1 = I_2 = I_3$)?

פתרון

1. נגדיר את ראשית הצירים במרכז המוט שמחבר את הדיסקיות. נחשב את מומנט ההתמד עבור כל דיסקה במרכז המסה שלה ואז נעביר לראשית שבחרנו בעזרת משפט הציר המוסט: עבור כל דיסקה נעבוד בקואורדינטות גליליות, כאשר ציר z מאונך לדיסקה (זו מערכת הצירים הראשיים של דסקה כמובן). נחשב

$$m = \sigma \pi r^2,$$

$$I_2 = I_1 = \sigma \int d\phi \int dr \left[r \ \left(y^2 + z^2 \right) \right] = \sigma \int \sin^2 \phi \, d\phi \int dr \, r^3 = m\frac{r^2}{4},$$

$$I_3 = \sigma \int d\phi \int dr \left[r \ \left(y^2 + x^2 \right) \right] = I_1 + I_2 = 2I_1 = m\frac{r^2}{2}.$$

אז עבור דיסקה בודדת נקבל את הטנזור

$$I_{r_i} = \begin{pmatrix} m\frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{r^2}{2} \end{pmatrix},$$

עכשיו נסיט את הטנזור ב$\boldsymbol{a} = (0, 0, l/2)$, כאשר l זה אורך המוט, ונקבל

$$I'_{r_i} = \begin{pmatrix} m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{r^2}{2} \end{pmatrix},$$

ועבור שתי הדיסקיות יחד נקבל

$$I' = \begin{pmatrix} m\left(\frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{5R^2}{2} \end{pmatrix}.$$

2. בשביל לקבל סביבון ספירי, נדרוש ש$I'_1 = I'_3$:

$$m\left(\frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{2}\right) = m\frac{5R^2}{2} \implies l = \sqrt{\frac{5}{2}}R.$$

2 טרנספורמציות סיבוב, זוויות אוילר ולגראנג'יאן של גוף קשיח

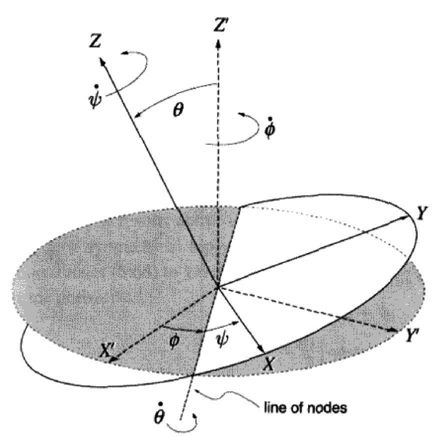
מעבר בין מערכת קואורדינטות אחת לבין מערכת אחרת המסובבת בזווית כלשהי ביחס למערכת הראשונה, יכול להתבצע בעזרת מטריצת סיבוב הפועלת על וקטורים במערכת הראשונה

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{U}_{\hat{n}}\left(\theta\right)\boldsymbol{r}.$$

עבור סיבוב סביב ציר נתון המטריצה ההופכית היא פשוט

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}_{\hat{n}}^{-1}\left(\theta\right)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}_{\hat{n}}\left(-\theta\right)\boldsymbol{r}'.$$

בשביל להגדיר את המטריצה $\boldsymbol{U}_{\hat{n}}\left(\theta\right)$ צריך שלושה גדלים: 2 זוויות המגדירות את כיוון ציר הסיבוב, וזווית שלישית המגדירה את זווית הסיבוב סביב ציר זה. כלומר שלושה זוויות מספיקות בשביל לתאר כל תנועה סיבובית.
בשביל לתאר תנועה של גוף קשיח, צריך לתאר את תנועת מרכז המסה ואת הסיבוב של הגוף ביחס למרכז המסה. אחת הדרכים לתאר סיבוב שרירותי כלשהו של גוף היא בעזרת זוויות אוילר (שבדר"כ מסומנות ב $(\phi,\theta,\psi$), המהוות שלושה גדלים ב"ת היכולים לתאר סיבוב ביחס למערכת נתונה, לכן זוויות אלו מתאימות לשמש כקואורדינטות מוכללות בלגראנג'יאן.
למעשה: בוחרים מערכת "מעבדה" נוחה, שנעה עם הגוף, אבל שומרת על אותה אוריינטציה. אחר כך מוצאים את הצירים הראשיים של הגוף (עדיף שמערכת המעבדה תתלכד עם מערכת הצירים הראשיים באיזשהו רגע). זוויות אויילר יגדירו איך הגוף מסתובב ביחס למערכת הנחה: הזוויות θ,ϕ מגדירות את כיוון ציר הסיבוב של הגוף, והזווית ψ תגדיר כמה הגוף מסתובב סביב אותו הציר (התמונה למטה היא כמובן מ H&F).



במערכת הגוף: הסיבוב בזווית ψ הוא סביב ציר ה $\hat{e}_\psi = \hat{z}$, הסיבוב בθ הוא סביב ציר במישור $x-y$ בזווית ψ מציר ה$\hat{x}$, $\hat{e}_\theta = (\cos\psi, -\sin\psi, 0)$, והסיבוב בזווית ϕ הוא סביב ציר בכיוון $\hat{e}_\phi = (\sin\psi\sin\theta, \cos\psi\sin\theta, \cos\theta)$. שימו לב! אלו שלושה צירי סיבוב שאינם מאונכים זה לזה.
מכאן שווקטור המהירות הזוויתית הכללי ביותר המבוטא בעזרת זוויות אוילר במערכת הגוף הוא

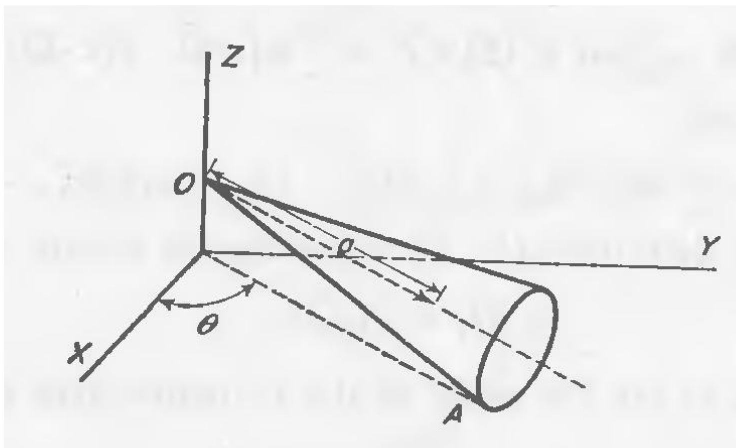
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\hat{e}_\psi + \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\hat{e}_\phi = \left(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta, -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta, \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right).$$

אם נעבוד בצירים ראשיים נוכל לרשום את האנרגיה הקינטית הסיבובית בלגראנג'יאן בעזרת קואורדינטות אלו וטנזור האינרציה המתאים על ידי

$$T = \frac{1}{2}\left[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right].$$

שאלה - חרוט מתגלגל ללא החלקה

נתון חרוט בעל מסה m וזוית פתיחה α, המתגלגל ללא החלקה על משטח אופקי כאשר הקודקוד שלו מקובע לנקודה על ציר z בגובה השווה לרדיוס הבסיס שלו (כלומר, ציר הסימטריה של החרוט מקביל למשטח). המרחק בין הקודקוד למרכז המסה הינו a. מומנטי ההתמד של הגוף בצירים ראשיים סביב מרכז המסה נתונים.בשאלה זו נרצה למצוא את האנרגיה הקינטית של החרוט.



1. מהו ציר הסיבוב הרגעי? נסמן את גודל המהירות הזוויתית סביב ציר זה ב - Ω. הביעו את Ω באמצעות $\dot{\theta}$.
2. כעת, רשמו את האנרגיה הקינטית הכוללת של החרוט במערכת הצירים הראשיים שלו.
3. השתמשו במשפט הצירים המקבילים כדי לרשום את האנרגיה הקינטית הכוללת עבור מערכת צירים שאחד מהצירים שלה מתלכד עם ציר z, ובדקו שקיבלתם אותה תוצאה כמו בסעיף הקודם.

הפתרון

1. ציר הסיבוב הרגעי הינו OA, מכיון שזה הציר שמהירותו, רגעית, היא אפס. כיוון שהחרוט מסתובב סביב ציר זה במהירות זוויתית Ω, המהירות הרגעית של מרכז המסה הינה $v_{cm} = \Omega\, a\sin\alpha$, כאשר $a\sin\alpha$ הינו המרחק בין מרכז המסה לציר הסיבוב. מצד שני, ניתן לראות כי מהירות מרכז המסה ניתנת ע"י $a\dot{\theta}$, ומכאן נקבל

$$\Omega = \frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

2. כעת נרצה לרשום את המהירות הזוויתית במערכת הצירים הראשיים של הגוף. נסמן את מערכת הצירים של מרכז המסה ב-$\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, ונקבע את ציר $\hat{x}_3$ בתור ציר הסימטריה של החרוט, ציר $\hat{x}_1$ אנכי לרצפה וציר $\hat{x}_2$ מקביל לרצפה. תחת בחירה זו, ניתן לרשום כי:

$$\vec{\Omega} = \Omega \sin\alpha\, \hat{x}_1 + 0\hat{x}_2 + \Omega\cos\alpha\, \hat{x}_3 = \dot{\theta}\, \hat{x}_1 + \dot{\theta}\cot\alpha\, \hat{x}_3. \tag{2}$$

בשביל להגיע לביטוי לעיל פשוט מטילים את הכיוון של וקטור התנע הזוויתי $\vec{\Omega}$ שמקביל לקו OA על הצירים החדשים. על ידי שימוש במהירות הזוויתית, ובכך שהצירים שבחרנו הם צירים ראשיים, נקבל שהאנרגיה הקינטית הינה

$$T = \frac{1}{2}M\left(a\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\theta}\cot\alpha\right)^2 \tag{3}$$

3. כעת ציר $\hat{x}_1$ מתלכד עם ציר z, ולפי משפט הצירים המקבילים נקבל

$$I_1' = I_1 + Ma^2 \tag{4}$$

והאנרגיה הקינטית הינה:

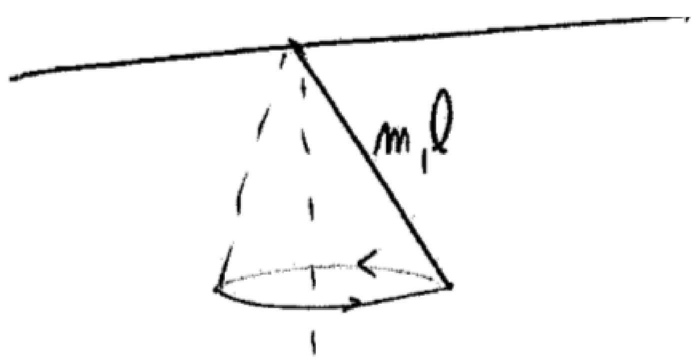
$$T = \frac{1}{2}I_1'\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\theta}\cot\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}(I_1 + Ma^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\theta}\cot\alpha\right)^2. \tag{5}$$

ניתן לראות כי במערכת זו, הסיבוב סביב ציר $\hat{x}_1$ כולל גם את התנועה של מרכז המסה.

שאלה - מוט מעוגן

מוט קשיח בעל מסה m ואורך l מעוגן בציר חופשי לתקרה: יש להניח שהמוט תלוי, מעוגן בנקודה אחת וחופשי להסתובב בכל כיוון סיבובי. כמו כן נתונים מומנטי ההתמד סביב מרכז המסה $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}ml^2 \neq I_3$ כאשר I_3 נתון ושונה מאפס.

1. רשום את לגרנגיאן המערכת בעזרת זויות אויילר.
2. מהם התנעים בבעיה? רשום ביטוי מפורש לכל אחד
3. מצא תנאי לתנועת המוט כמטוטלת חרוטית , ראה איור.
4. תאר את מסלולו של קצה המוט במקרה הכללי (במשפט אחד)



הפתרון

1. נסמן את ההזזה בשטיינר בתור I, כלומר: $I = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2$ מכאן הלגרנג'יאן הינו:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

2. קבועי התנועה הנשמרים בבעיה הינם:

$$p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)$$
$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = I\sin^2\theta\dot{\phi} + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta$$
$$E = \frac{1}{2}I\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

3. נפשט ראשית את המשוואות עד לקבלת תנועה במימד אחד:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I\sin^2\theta}$$
$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta}_{u_{eff}(\theta)}$$

תנועה חרוטית הינה המקרה בו $\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$ כלומר התנאי הינו בצורה של משוואה סתומה עבור θ:

$$\frac{1}{2}g\ell m\sin(\theta) + \frac{p_\psi(p_\phi - p_\psi\cos(\theta))}{I\sin\theta} - \frac{\cos(\theta)(p_\phi - p_\psi\cos(\theta))^2}{2I\sin^3(\theta)} = 0$$

בנוסף נעיר כי תנאי זה לא מקיים תמיד נקודת שיווי משקל יציבה.

4. קצה המוט נע על פני כדור ברדיוס ℓ כאשר $\theta_{min} < \theta < \theta_{max}$.