

תנודות הרמוניות

קרדיט לרשימות – רעות קרני

Kleppner 11 פרקים

אופן תנועה של מסופים הנמצאים קרוב לשני משקי.

$$X = A \cos(\omega t + \phi) \rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

תנועה הרמונית פשוטה

כאשר הכוח (הוא כוח מתמיד ובתווה) שהכח תקוע -

$$F = -K \Delta X$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow F = -KX$$

$$F = ma \Rightarrow -KX = m \frac{d^2X}{dt^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ms (ומחזורי אורך ארוך)}$$

סרטון הדגמה : <https://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg>

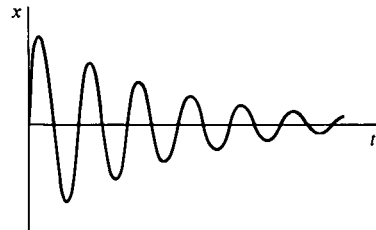
אוסצילטור הרמוני מרוסן – עם חיכוך

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_1 t + \phi).$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

$$F = F_{\text{spring}} + f \\ = -kx - bv.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$



The degree of damping of an oscillator is often specified by a dimensionless parameter Q , the *quality factor*, defined by

$$Q = \frac{\text{energy stored in the oscillator}}{\text{energy dissipated per radian}} \approx \frac{\omega_0}{\gamma}$$

סרטון הדגמה : <https://www.youtube.com/watch?v=sP1DzhT8Vzo>

אוסצילטור הרמוני מאולץ

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

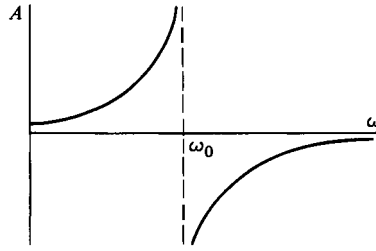
כוח מחזורי חיצוני מאלץ את האוסצילטור

(לא נתחשב בחיכוך כעת)

$$(-m\omega^2 + k)A \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

$$x = A \cos \omega t \quad \text{פתרון מוצע:}$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Resonance $\omega = \omega_0$.

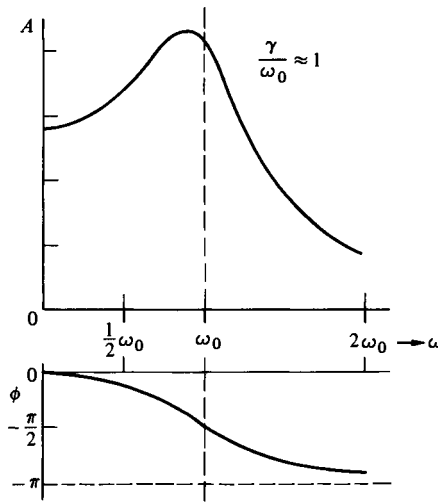
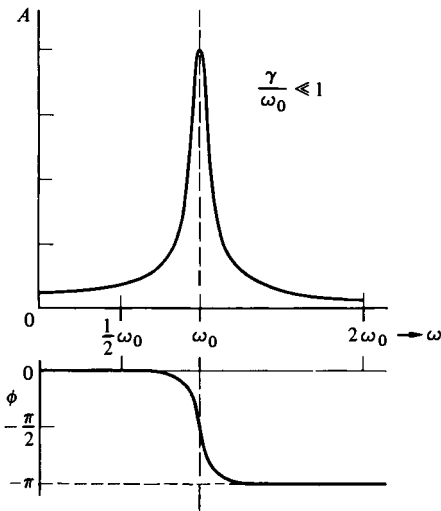
אוסצילטור הרמוני מאולץ ומרוסן

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2]^{1/2}}$$

$$x = B \cos \omega t + C \sin \omega t = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$



$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$$

שאלת הכנה 1 : סכום של סינוס וקוסינוס

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \text{היעזרו בנוסחת הסכום}$$

להראות כי $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \phi)$ ומצאו את הקשר בין A, B, C ו ϕ ולהפך.

שאלת הכנה 2 : סינוס וקוסינוס במספרים מרוכבים

היעזרו בנוסחת אוילר $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ו $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ כדי להוכיח כי $Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = C \cos(\omega t + \phi)$ ולמצוא את הקשר בין המקדמים, כמו בשאלה 1.

שאלת הכנה 3 :

a. A mass of 10 kg falls 50 cm onto the platform of a spring scale, and sticks. The platform eventually comes to rest 10 cm below its initial position. The mass of the platform is 2 kg. Find the spring constant.

b. It is desired to put in a damping system so that the scale comes to rest in minimum time without overshoot. This means that the scale must be critically damped (see Note 10.1). Find the necessary damping constant and the equation for the motion of the platform after the mass hits.