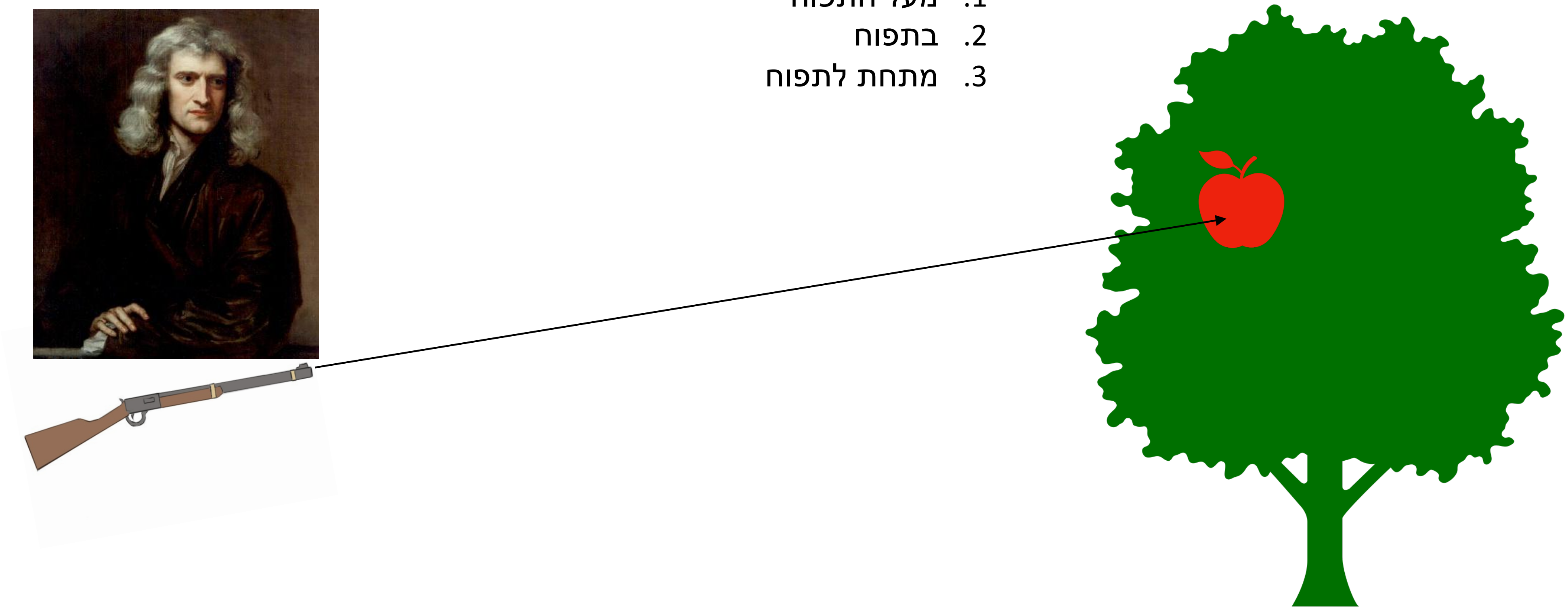
סדנא שבוע 2 – תנועה בשני ממדים

ניוטון והתפוח

איזק ניוטון מכוון רובה על תפוח ולוחץ על ההדק בדיוק כשהוא נופל מהעץ.
איפה יפגע הקליע?
הניחו שניתן להתעלם מחיכוך.

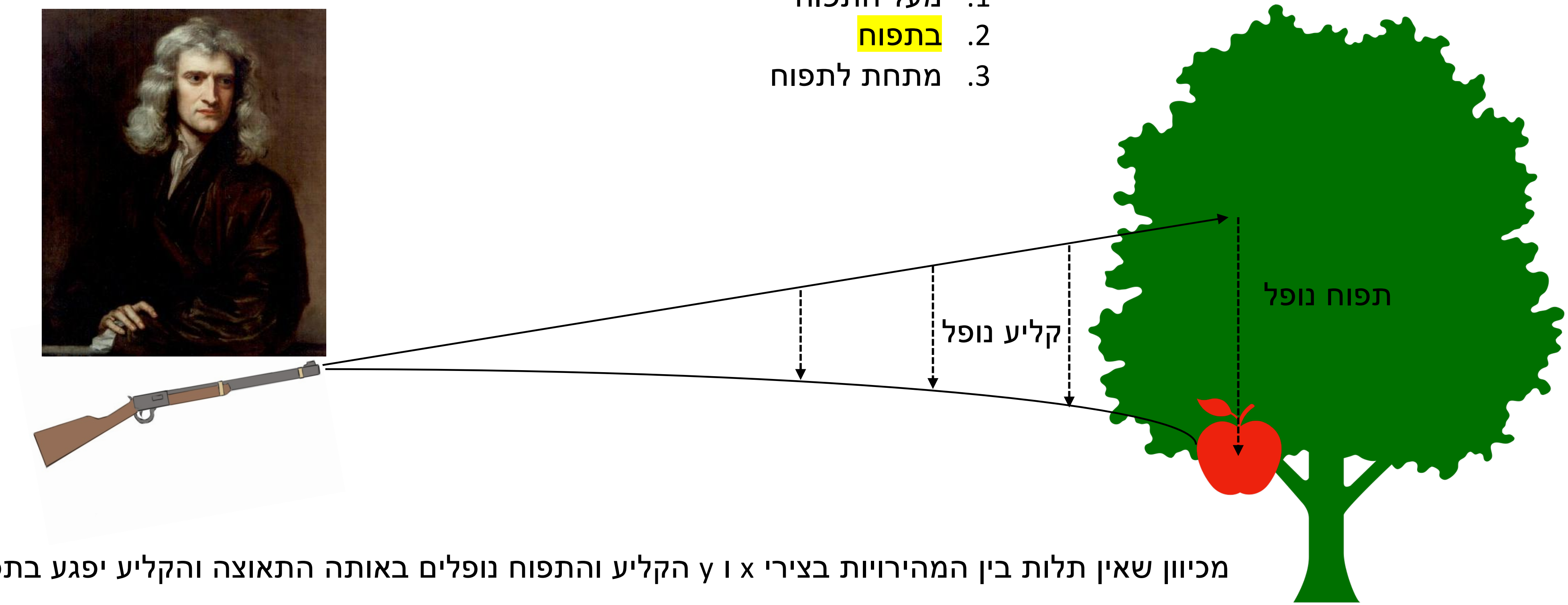
1. מעל התפוח
2. בתפוח
3. מתחת לתפוח



ניוטון והתפוח

איזק ניוטון מכוון רובה על תפוח ולוחץ על ההדק בדיוק כשהוא נופל מהעץ.
איפה יפגע הקליע?
הניחו שניתן להתעלם מחיכוך.

1. מעל התפוח
2. בתפוח
3. מתחת לתפוח



מכיוון שאין תלות בין המהירויות בצירי x ו y הקליע והתפוח נופלים באותה התאוצה והקליע יפגע בתפוח.

הסבר:

נקרא למיקום האנכי של התפוח y_a והמיקום של הקליע y_b

אם לא היתה פועלת כבידה, התפוח לא היה נופל והקליע היה פוגע בו.
במקרה זה המיקום של הקליע והתפוח בזמן הפגיעה היה זהה (הגרש מסמן מיקום ב"עולם" בלי כבידה):

$$y_b(t) = y_b^0 + v_y^0 t = y_a(t)$$

מאחר שיש תאוצת כבידה, והיא זהה עבור הקליע והתפוח, שניהם מאיצים באותה תאוצה.

$$y_a(t) = y_a^0 - \frac{1}{2} g t^2$$

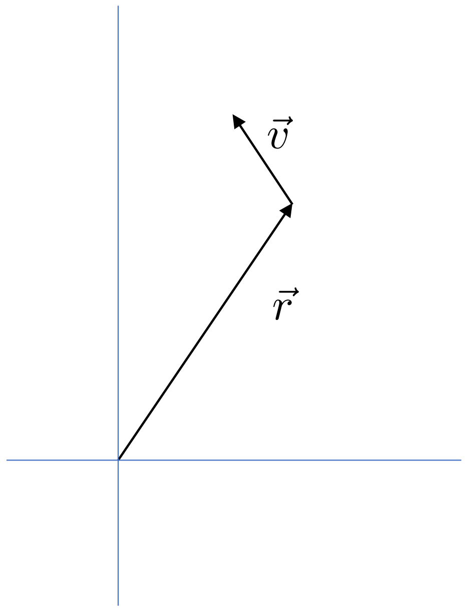
$$y_b(t) = y_b^0 + v_y^0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

אבל אם נציב את המשוואה שלמעלה (בלי הכבידה) נקבל:

$$y_b(t) = y_b^0 + v_y^0 t - \frac{1}{2} g t^2 = y_a^0 - \frac{1}{2} g t^2$$

כלומר הקליע והתפוח יגיעו לאותה הנקודה.

תנועה בשני ממדים



מיקום, מהירות ותאוצה הם עכשיו וקטורים:

$$\vec{r} = (x, y)$$

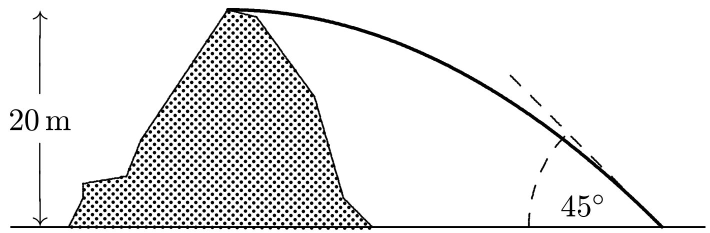
בכל רכיב קצב השינוי הוא
כמו בתנועה חד-ממדית

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x(t), v_y(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

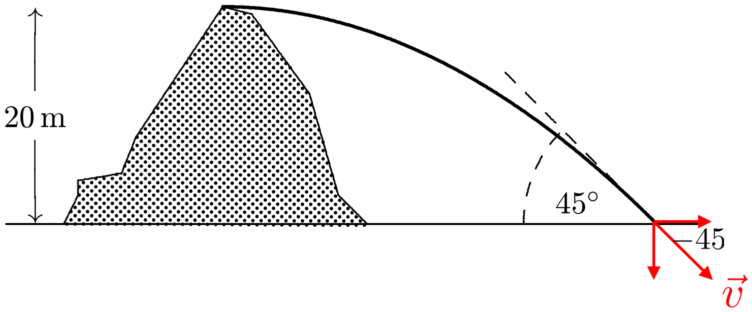
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (a_x(t), a_y(t)) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$$

כדור נזרק בכיוון האופקי מראש גבעה בגובה 20 מטר. הוא פוגע בקרקע בזווית של 45 מעלות. באיזו מהירות נזרק?
הניחו שניתן להתעלם מחיכוך עם האוויר וש $g = 10m/s^2$

1. 14 m/s
2. 20 m/s
3. 28 m/s
4. 32 m/s
5. 40 m/s



המהירות היא ווקטור, ולכן יש לה גודל וכיוון. מהנתון אנחנו יודעים שהכיוון הוא אופקי בזמן השיגור ו 45 מעלות בזמן הפגיעה.



השינוי במהירות הוא:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (0, -g)$$

נשווה רכיבים:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0\,, \qquad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

המיקום בציר y משתנה:

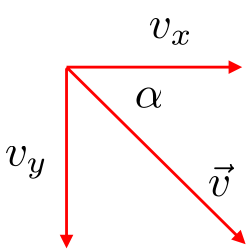
$$v_y = -gt$$

בעוד שהמהירות בציר x נשארת קבועה:

$$v_x = v_0$$

ווקטור המהירות יהיה לכן:

$$\vec{v} = (v_0, -gt)$$



הכיוון של ווקטור המהירות ביחס לאופק נתון על ידי:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\tan\alpha = -\frac{gt}{v_0}$$

הזווית $\alpha = -45$ ו g = 10 m/s^2 ידועים אבל צריך למצוא את זמן התעופה.

הגובה כפונקציה של הזמן הוא:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_0 - y = \frac{1}{2}gt^2$$

ולכן:

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} = \sqrt{40/10} = 2\,s$$

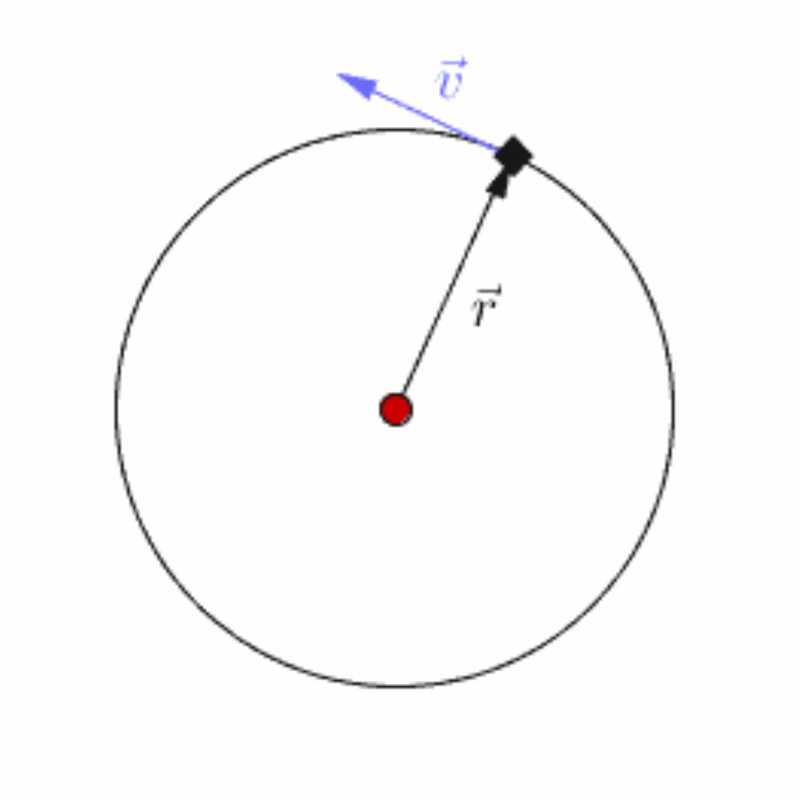
$$\tan(-45) = -1$$

$$v_0 = 10t = 20m/s$$

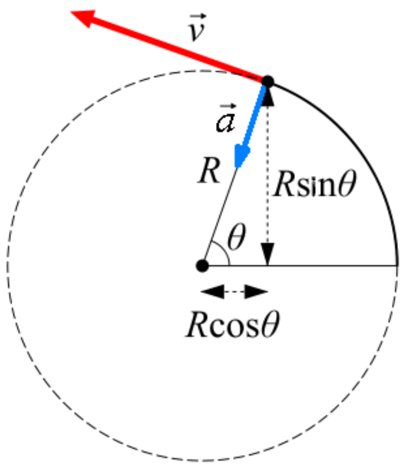
התשובה הנכונה:

1. 14 m/s
2. 20 m/s
3. 28 m/s
4. 32 m/s
5. 40 m/s

תנועה מעגלית



תנועה מעגלית



תנועה המוגבלת למעגל ברדיוס קבוע R

אם יודעים את הזווית, אפשר למצוא את המיקום:

$$\vec{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta)$$

את הזווית מודדים ברדיאנים:

$$\theta = \frac{s}{R}$$

שימו של שמדובר בגודל חסר יחידות. אנחנו רושמים rad כדי לזכור שמדובר בזווית ולא בסתם מספר.
המרחק שהחלקיק עובר:

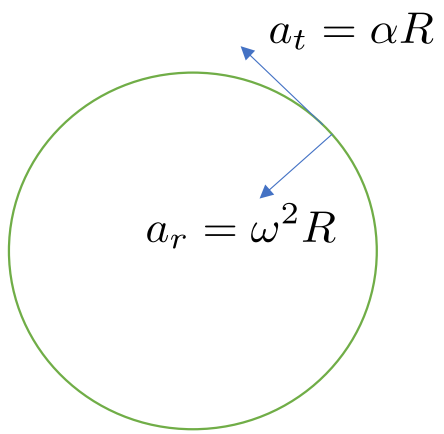
$$s = \theta R$$

מהנגזרת של המיקום ניתן למצוא את המהירות:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}R = \omega R$$

כאשר $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ היא המהירות הזוויתית – כמה זווית (ברדיאנים) אנחנו מכסים ביחידת זמן.
הקשר הזה בין מהירות זוויתית למהירות נכון רק עבור מהירות זוויתית הנמדדת ברדיאנים.

תנועה מעגלית



שינוי במהירות הזוויתית גורם לתאוצה זוויתית.
תאוצה זו גורמת ל**שינוי בגודל ווקטור המהירות:**

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha R$$

תאוצה זו נקראת תאוצה משיקית

גם אם המהירות הזוויתית קבועה, עדיין פועלת תאוצה משום שכל שינוי בווקטור המהירות (גודל וכיוון) נובע מפעולה של תאוצה:

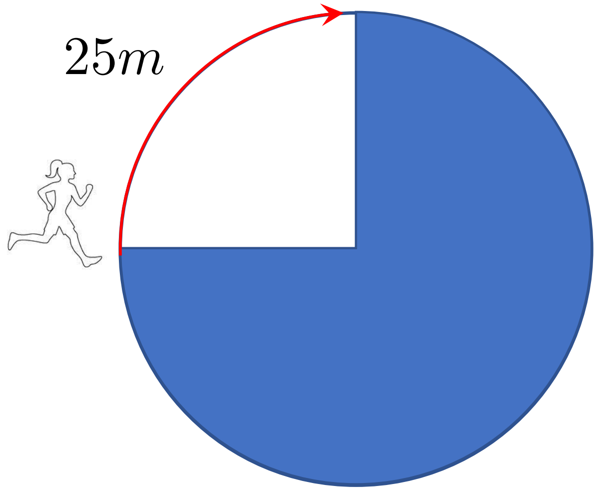
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

תאוצה זו פועלת בניצב לכיוון התנועה וגודלה הוא:

$$a_r = \omega^2 R$$

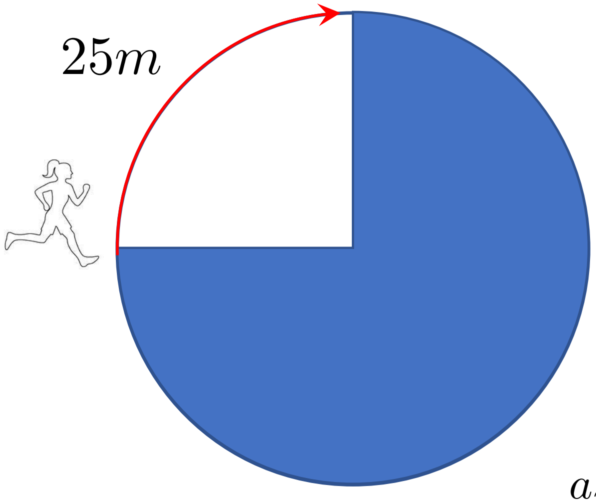
תאוצה זו נקראת תאוצה רדיאלית

ילדה רצה במהירות קבועה לאורך מעגל. אחרי ¼ מעגל היא עוברת 25 מטרים ב 5 שניות.
מהו **גודל** התאוצה?



1. $0.31\ m/s^2$
2. $1.3\ m/s^2$
3. $1.6\ m/s^2$
4. $3.9\ m/s^2$
5. $6.3\ m/s^2$

ילדה רצה במהירות קבועה לאורך מעגל. אחרי ¼ מעגל היא עוברת 25 מטרים ב 5 שניות.
מהו **גודל** התאוצה?



1. $0.31\ m/s^2$
2. $1.3\ m/s^2$
3. $1.6\ m/s^2$
4. $3.9\ m/s^2$
5. $6.3\ m/s^2$

הקשר בין מהירות התנועה לתאוצה הרדיאלית נתון על ידי:

$$a_r = \omega^2 R = \left(\frac{v}{R}\right)^2 R = \frac{v^2}{R}$$

מאחר שנתון ש ¼ מעגל הוא באורך 25 m , היקף המעגל הוא 100 m ורדיוס המעגל הוא:

$$2\pi R = 100m$$

$$R \approx 15.9m$$

המהירות היא:

$$v = \frac{25m}{5s} = 5\,m/s$$

התאוצה לכן תהיה:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{25}{15.9} \approx 1.6\frac{m}{s^2}$$

מכיוון שהתנועה מוגבלת למעגל היא בעצם תנועה על קו - אפשר לתאר את המיקום בעזרת מספר אחד - הזווית

כללי גזירה ואינטגרציה עבור תנועה מעגלית זהים לתנועה חד מימדית:

זווית (מיקום על המעגל) $\theta(t)$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)dt$$

מהירות זוויתית $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)dt$$

תאוצה זוויתית $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$

גלגל האיץ ממהירות התחלתית של 20 rad/s בתאוצה זוויתית קבועה. לאחר 9 שניות הוא הסתובב 450 rad.
התאוצה הזוויתית היתה:

1. $3.3\ rad/s^2$
2. $4.4\ rad/s^2$
3. $5.6\ rad/s^2$
4. $6.7\ rad/s^2$
5. $11\ rad/s^2$

גלגל האיץ ממהירות התחלתית של 20 rad/s בתאוצה זוויתית קבועה. לאחר 9 שניות הוא הסתובב 450 rad.
התאוצה הזוויתית היתה:

1. $3.3\ rad/s^2$
2. $4.4\ rad/s^2$
3. $5.6\ rad/s^2$
4. $6.7\ rad/s^2$
5. $11\ rad/s^2$

השינוי בזווית כפונקציה של הזמן הוא:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$450 = 20 \times 9 + \frac{1}{2}\alpha \times 9^2$$

$$\frac{1}{2}\alpha \times 9^2 = 450 - 180 = 270\,rad$$

התאוצה הזוויתי היא לכן:

$$\alpha = 270/81 \times 2 = 6\frac{2}{3}\ \frac{rad}{s^2}$$