

# סדנא 8

מערכות רב-חלקיקיות/רב-גופיות

## אנרגיה של מערכת רב גופית

בסדנא הקודמת הגדרנו את התנע הכולל של מערכת:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots$$

ושמתקיים קשר פשוט בין התנע הכולל של המערכת ומהירות מרכז המסה:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}}{M}$$

זה אומר שהתנע הכולל של המערכת מיוחס למרכז המסה, כלומר מבחינת התנע אפשר לחשוב על מערכת כעל חלקיק עם מסה M ותנע P

לגבי אנרגיה זה לא נכון – צריך להפריד בין אנרגיה קינטית של מרכז המסה, לבין אנרגיה של דינמיקה מסביב למרכז המסה:

$$K = K_{cm} + K_{int} = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2$$

כאשר  $\vec{u}_i$  היא המהירות של חלקיקי  $i$  במערכת מרכז המסה – מערכת צירים הנעה עם מרכז המסה.

האנרגיה הכוללת של מערכת חלקיקים כוללת בדרך כלל גם אנרגיה פוטנציאלית. במקרה זה:

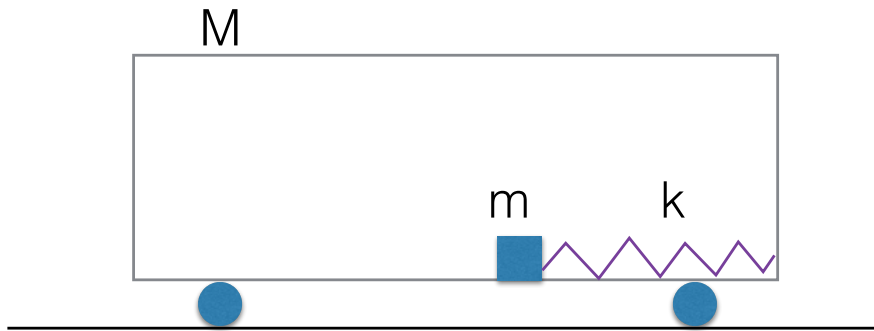
$$E = K_{cm} + K_{int} + U_{ext} + U_{int}$$

כאשר אנרגיה פוטנציאלית פנימית הינה אנרגיה פוטנציאלית הנובעת מכוחות פנימיים הפועלים בין רכיבי המערכת ואנרגיה פוטנציאלית חיצונית נובעת מכוחות חיצוניים.

כרגיל, כוחות לא משמרים גורמים לשינוי האנרגיה:

$$E_2 = E_1 + W_{nc}$$

גוף קטן שמסתו  $m$  נמצא על רצפה חלקה (ללא חיכוך) של קרון שמסתו  $M$ .  
 הגוף מחובר לקיר הקרון באמצעות קפיץ שקבוע הקפיץ שלו הוא  $k$ .  
 בהתחלה הקפיץ מתוח כך שהוא נמצא במרחק  $\ell$  מהנקודה שבה הוא רפוי, והגופים נמצאים במנוחה.  
 מהו גודל המהירות המרבי של הגוף הקטן ביחס לרצפה אחרי שמשחררים את הקפיץ?  
 אין חיכוך בין הקרון לרצפה.



$$v = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \ell \quad .1$$

$$v = \sqrt{\frac{Mk}{m^2+mM}} \ell \quad .2$$

$$v = \frac{Mk}{m+M} \ell^2 \quad .3$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m-M}} \ell \quad .4$$

המערכת במקרה זה היא הגוף + הקפיץ (מניחים שאין לו מסה) + עגלה  
דבר ראשון אנחנו שואלים – איזה גדלים נשמרים בבעיה?  
במקרה זה, מכיוון שאין חיכוך, גם **תנע** כולל של המערכת וגם **אנרגיה** כוללת של המערכת **נשמרים!**

התנע הכולל של המערכת בכל רגע נתון הוא:

$$P = Mu + mv$$

כאשר  $v$  היא מהירות הגוף ו  $u$  היא מהירות העגלה.  
מכיוון שכל חלקי המערכת מתחילים ממנוחה, התנע הכולל בהתחלה הוא 0 ומכיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים בכיוון האופקי, **מתקיים שימור תנע** ובכל רגע נתון:

$$P = 0$$

ולכן גם מהירות מרכז המסה היא 0.  
מפה נמצא קשר בין המהירויות:

$$Mu + mv = 0$$

$$u = -\frac{m}{M}v$$

כלומר, גודל מהירות הגוף הקטן פרופורציונלי לגודל מהירות הגוף הגדול.

האנרגיה הכוללת של המערכת בהתחלה היא:

$$E_0 = K_{cm} + K_{int} + U_{cm} + U_{int} = U_{int} = \frac{1}{2}k\ell^2$$

כלומר, בהתחלה יש לגוף רק אנרגיה פוטנציאלית פנימית הנובעת מכך שהקפיץ מתוח.

מהירות הגוף הקטן (וגם מהירות הגוף הגדול) יגיעו לגודלן המקסימלי כאשר האנרגיה הקינטית תהיה מקסימלית. זה יקרה כאשר הקפיץ יהיה רפוי וכל האנרגיה האלסטית תהפוך לאנרגיה קינטית. שימו לב שמכיוון שמהירות מרכז המסה 0, זוהי אנרגיה קינטית פנימית:

$$E_{max} = K_{int} = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

מכיוון שאין כוחות לא-משמרים שמבצעים עבודה, האנרגיה הכוללת נשמרת ו  $E_2 = E_1$

$$\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\ell^2$$

נציב:

$$\frac{m^2}{M}v^2 + mv^2 = k\ell^2$$

$$v^2 = \frac{Mk}{m^2 + mM} \ell^2$$

$$v = \sqrt{\frac{Mk}{m^2 + mM}} \ell$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \ell \quad .1$$

$$v = \sqrt{\frac{Mk}{m^2+mM}} \ell \quad .2$$

$$v = \frac{Mk}{m+M} \ell^2 \quad .3$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m-M}} \ell \quad .4$$

התנגשויות –

נבחין בין 2 סוגי התנגשויות:

1. התנגשות אלסטית – גם התנע וגם האנרגיה הקינטית הכוללת של מרכזי המסה של הגופים נשמרת.

2. התנגשות לא-אלסטית – התנע נשמר אבל האנרגיה הקינטית הכוללת של מרכזי המסה לא נשמרת – חלק מהאנרגיה של מרכזי המסה הופכת לאנרגיה פנימית.



עגלות בעלות מסות של 2 ק"ג ו 3 ק"ג נעות אחת לעבר השניה על מסילה אופקית חסרת חיכוך. לאחר ההתנגשות שתי העגלות נעות יחד והאנרגיה הקינטית שלהן (ביחס לצופה ניח) היא 40 ג'אול. מהי מהירות מרכז המסה שלהן לפני ההתנגשות?

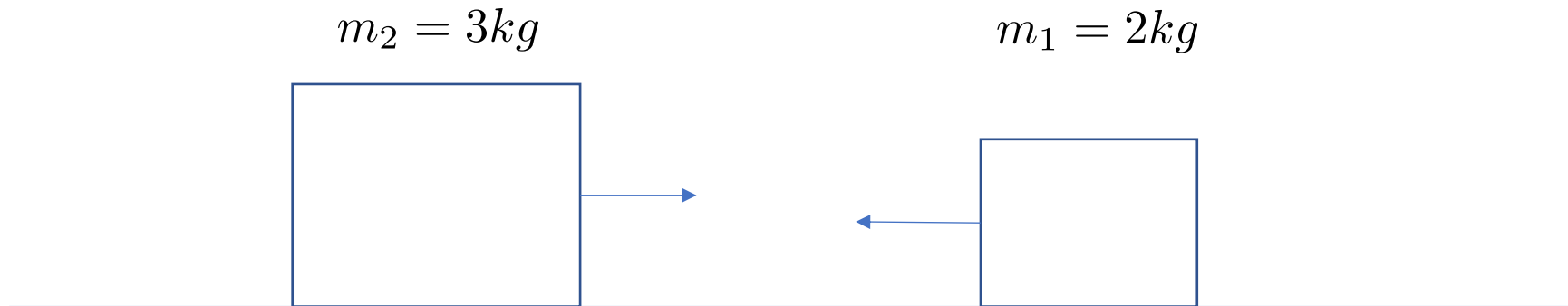
(a) 0

(b) 2.8 מטר לשניה.

(c) 4.0 מטר לשניה.

(d) 5.2 מטר לשניה.

(e) 6.3 מטר לשניה.



המערכת שלנו תכלול את שתי העגלות.

האנרגיה של המערכת לאחר ההתנגשות היא פשוט האנרגיה הקינטית של מרכז המסה:

$$K_{cm} = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{cm}^2 = \frac{5}{2} V_{cm}^2 = 40J$$

מהירות מרכז המסה אחרי ההתנגשות היא לכן:

$$V_{cm} = 4 \frac{m}{s}$$

מכיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים, התנע נשמר ולכן מהירות מרכז המסה לפני ההתנגשות זהה למהירות מרכז המסה אחרי ההתנגשות:

$$P_{before} = P_{after} = \frac{V_{cm}}{M}$$

עגלות בעלות מסות של 2 ק"ג ו 3 ק"ג נעות אחת לעבר השניה על מסילה אופקית ישרה חסרת חיכוך. לאחר ההתנגשות שתי העגלות נעות יחד והאנרגיה הקינטית שלהן (ביחס לצופה ניח) היא 40 ג'אול. אם נתון שגודל מהירות העגלה בעלת מסה של 2 ק"ג היה 5 מטר לשניה לפני ההתנגשות, כמה אנרגיה אבדה בהתנגשות?

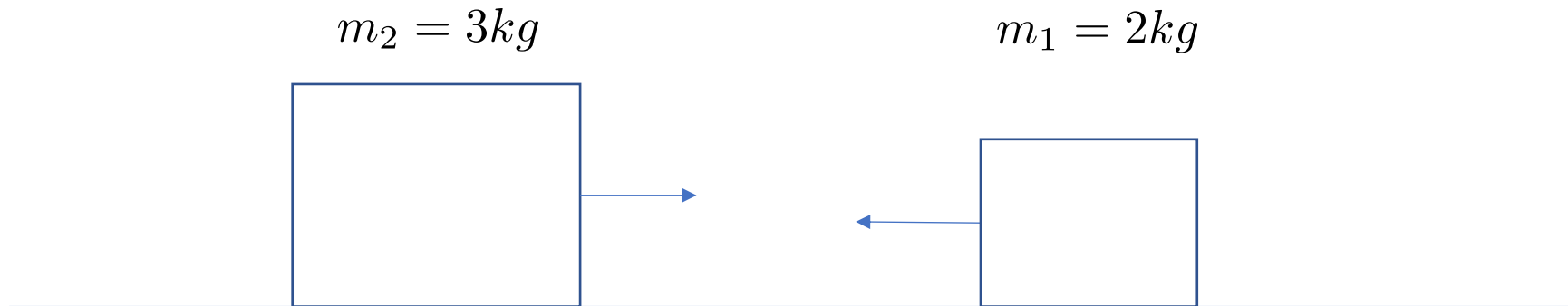
0 (a)

100J (b)

40J (c)

135J (d)

80J (e)



מה נשמר בבעיה?

ברור מהשאלה (ומכך ששני הגופים הופכים לאחד) שאנרגיה כוללת של מרכזי המסה לא נשמרת.

מכיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים אופקיים – תנע נשמר.

בשאלה הקודמת מצאנו את גודל מהירות מרכז המסה ומשם נמצא את התנע של המערכת:

$$P = MV_{cm} = 20 \text{ kg} \times \frac{m}{s}$$

מפה נמצא את מהירות העגלה השנייה לפני ההתנגשות:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = P$$

מכיוון שהסימנים של המהירויות הפוכים יהיה לנו נוח לבחור את הכיוון של עגלה 1 כשלילי ואת הכיוון של 2 כחיובי.

מכיוון שגודל התנע הסופי גדול מהתנע של עגלה 1 ברור שהתנע הסופי הוא בכיוון של עגלה 2:

לכן,

$$p_1 = -10 \text{ kg} \times \frac{m}{s}$$

$$-10 + m_2 v_2 = 20$$

$$v_2 = \frac{30}{3} = 10 \frac{m}{s}$$

מכאן שהאנרגיה הקינטית לפני ההתנגשות היא:

$$K_{before} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 25J + \frac{1}{2} \times 3 \times 100J = 175J$$

כלומר השינוי באנרגיה הוא

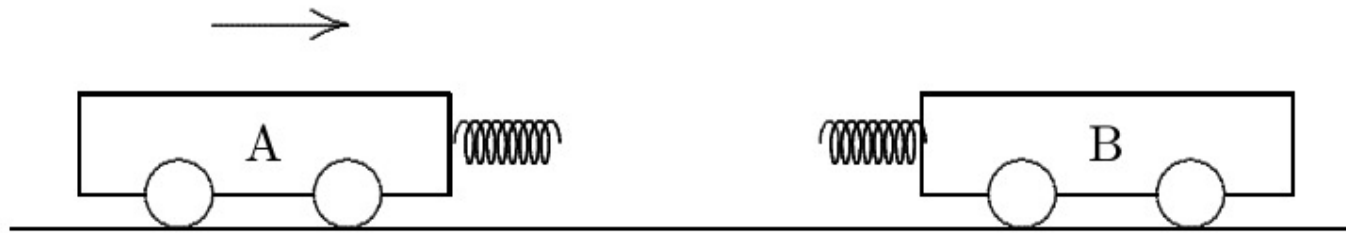
$$\Delta E_k = (175 - 40)J = 135J$$

100J (a)

40J (b)

135J (c)

80J (d)



עגלות בעלות מגני קפיץ מתנגשות כמתואר בציור. לעגלה A מסה של 2 ק"ג ולעגלה B מסה של 3 ק"ג. בהתחלה עגלה A נעה ימינה ועגלה B במנוחה. איזה מההיגדים הבאים נכון כאשר המרחק בין העגלות מינימלי?

- (a) עגלה B עדיין במנוחה
- (b) עגלה A הגיעה למנוחה
- (c) לעגלות יש את אותו תנע
- (d) לעגלות יש את אותה אנרגיה קינטית
- (e) האנרגיה הקינטית של המערכת מינימלית

נגדיר את המערכת כשתי העגלות.

מה נשמר? תנע ואנרגיה.

התנע הכולל של המערכת נשמר מכיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים על המערכת בכיוון האופקי.

לכן מהירות מרכז המסה קבועה:

$$V_{cm} = \frac{P}{m_A + m_B} = const$$

מכיוון שאין כוחות חיכוך והקפיצים אלסטיים, האנרגיה הכוללת גם כן נשמרת – התנגשות אלסטית.

כרגיל, ניתן לרשום אותה כסכום של אנרגיה קינטית של מרכז המסה, אנרגיה קינטית של תנועה מסביב למרכז המסה ואנרגיה

פוטנציאלית פנימית (של הקפיץ):

$$E = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 + \frac{1}{2} k \ell^2$$

כאשר  $u_A$  ו  $u_B$  הן המהירויות של A ו B במערכת מרכז המסה.

המרחק בין העגלות מינימלי כאשר הקפיץ מגיע לכיווץ מקסימלי. כשזה קורה האנרגיה הקינטית מסביב למרכז המסה הופכת לאנרגיה

פוטנציאלית של קפיץ.

- (a) עגלה B עדיין במנוחה
- (b) עגלה A הגיעה למנוחה
- (c) לעגלות יש את אותו תנע
- (d) לעגלות יש את אותה אנרגיה קינטית
- (e) **האנרגיה הקינטית של המערכת מינימלית**

האנרגיה הכוללת היא האנרגיה הקינטית של מרכז המסה + האנרגיה הקינטית הפנימית:

$$K = K_{cm} + K_{int}$$

הקפיץ מגיע לכיווץ מירבי כאשר  $K_{int} = 0$  מאחר והאנרגיה הקינטית של מרכז המסה קבועה, זאת תהיה האנרגיה המינימלית. **נראה למה התשובות האחרות לא נכונות:**

מאחר שמהירות מרכז המסה קבועה, המהירויות של A ושל B לא יהיו 0 אחרי ההתנגשות ולכן a ו b אינן תשובות נכונות מכיוון שברגע הכיווץ המקסימלי המהירויות שוות אבל המסות שונות, התנעים והאנרגיות הקינטיות אינם שווים:

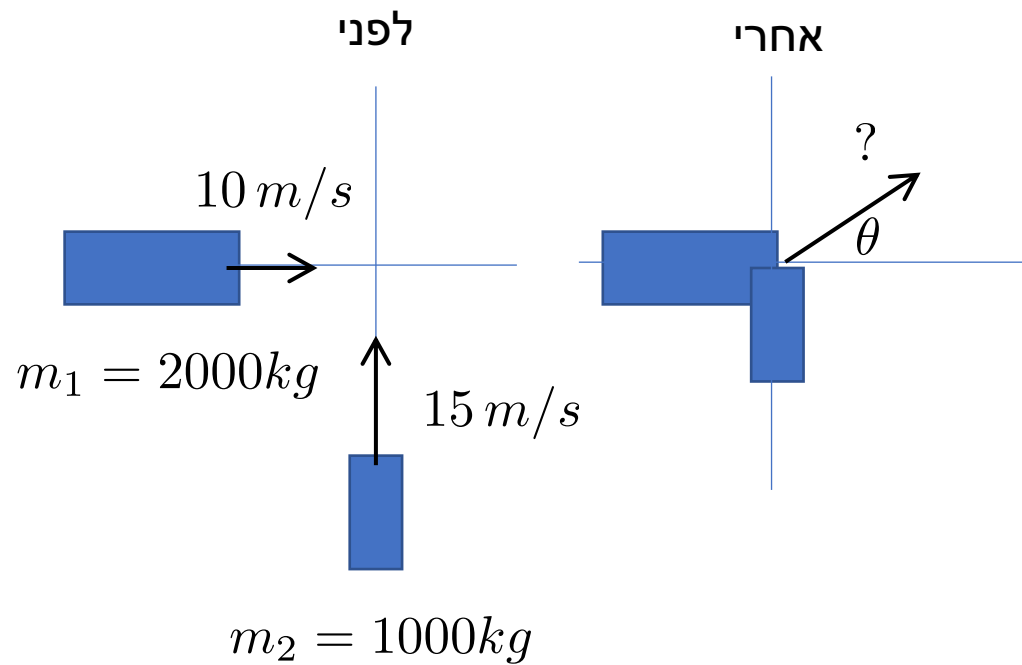
$$p_A = m_A V_{cm}$$

$$p_B = m_B V_{cm} \neq p_A$$

$$K_{cm} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V_{cm}^2 = \frac{1}{2} m_A V_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{cm}^2$$

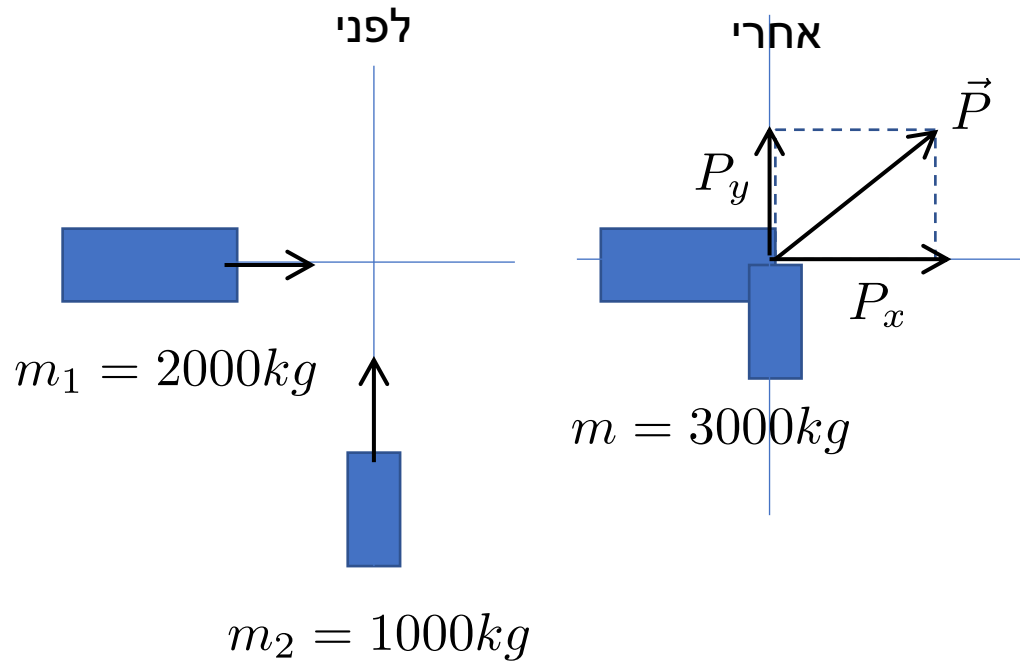
ולכן גם תשובות c ו d אינן נכונות.





שני גופים, האחד בעל מסה של  $m_1 = 2000kg$  נע במהירות  $v_1 = 10 \frac{m}{s}$  בכיוון מזרח והשני בעל מסה של  $m_2 = 1000kg$  ומהירות  $v_2 = 15 \frac{m}{s}$  בכיוון צפון, מתנגשים. אחרי ההתנגשות הם ממשיכים כגוף אחד. מהי מהירותם (גודל וכיוון) אחרי ההתנגשות?

1. 10 m/s, 31 deg
2. 5.2 m/s, 22 deg
3. 9.1 m/s 44 deg
4. 8.3 m/s 37 deg



נשתמש בכך שהתנע הכולל נשמר ובכך שהתנע הוא גודל וקטורי.  
 התנע הכולל של המערכת לפני ההתנגשות הוא:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{P} = 20,000 \hat{x} + 15,000 \hat{y}$$

$$\text{Tag}(\theta) = \frac{P_y}{P_x}$$

$$\theta \approx 37^\circ$$

$$v = \frac{P}{m} \approx 8.3 \frac{m}{s}$$

גוף 1 וגוף 2 נעים האחד לעבר השני. לגוף 1 מסה של 2kg ומהירות  $v_1 = 50 \frac{m}{s}$  ולגוף 2 מסה של 4kg ומהירות של  $v_2 = -25 \frac{m}{s}$ . אחרי ההתנגשות הגופים ממשיכים לנוע צמודים על אותו ציר התנועה. האנרגיה הקינטית שאבדה תוך כדי ההתנגשות הינה:



- .1 0
- .2 1250J
- .3 3750J
- .4 5000J
- .5 5600J

האנרגיה הקינטית של המערכת לפני ההתנגשות היתה:

$$E = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}2 \times 50^2 + \frac{1}{2}4 \times 25^2 = 2500 + 1250 = 3750J$$

על מנת למצוא את האנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות נמצא קודם את המהירות. מאחר ולא פועלים כוחות חיצוניים, התנע הכולל של המערכת נשמר ולכן:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 100 - 100 = 0$$

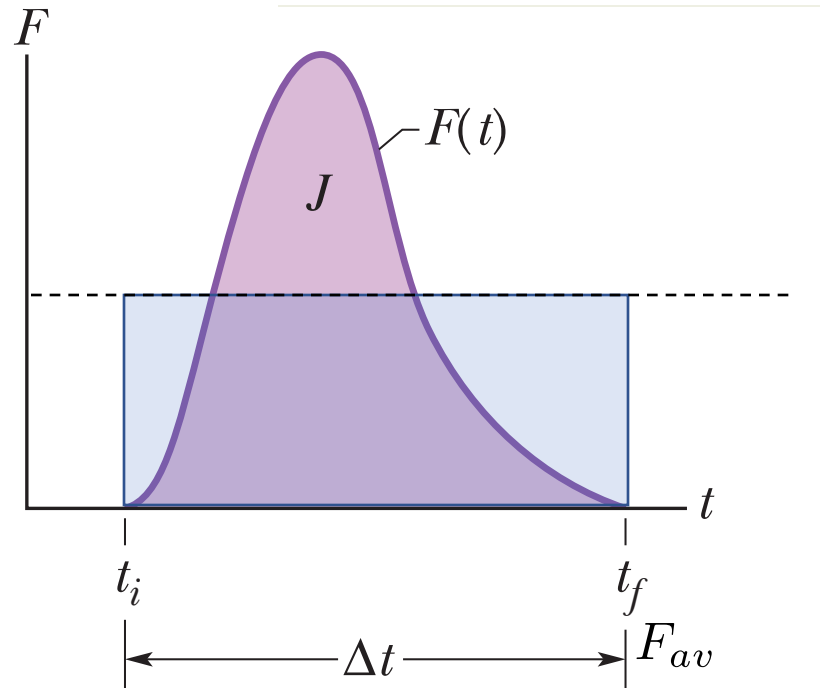
מאחר שהתנע נשמר, אנחנו מסיקים שאחרי ההתנגשות מהירות הגוף המאוחד תהיה 0. לכן, גם האנרגיה הקינטית תהיה 0 וכל האנרגיה הקינטית הלכה לאיבוד!

- .1 1250J
- .2 3750J
- .3 5000J
- .4 5600J

מתקף - השינוי בתנע:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i + \vec{J}$$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \vec{F}_{av}(t_f - t_i)$$



עגלה במשקל 2kg נעה על מסילה חסרת חיכוך במהירות של 3 m/s ומתנגשת בעגלה נייחת עם מסה של 4kg. לאחר ההתנגשות העגלות ממשיכות ביחד. המתקף שעגלה אחת מפעילה על השנייה הוא:

- .1 0
- .2 4Ns
- .3 6Ns
- .4 9Ns
- .5 12Ns

עגלה במשקל 2kg נעה על מסילה חסרת חיכוך במהירות של 3 m/s ומתנגשת בעגלה נייחת עם מסה של 4kg. לאחר ההתנגשות העגלות ממשיכות ביחד. המתקף שעגלה אחת מפעילה על השנייה הוא:

- .1 0
- .2 4Ns
- .3 6Ns
- .4 9Ns
- .5 12Ns

נחשב את השינוי בתנע של העגלה השנייה.  
התנע נשמר ולכן התנע הכולל לאחר ההתנגשות הוא:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 2kg \times 3 \frac{m}{s} \hat{x} = 6kg \cdot \frac{m}{s} \hat{x}$$

המהירות של הגופים לאחר ההתנגשות:

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}}{m} = 6 \frac{m}{s} \hat{x}$$

התנע של גוף 2 לאחר ההתנגשות יהיה לכן:

$$\vec{p}_2(after) = m_2 \vec{v} = 4kg \cdot \frac{m}{s} \hat{x}$$

$$\vec{J} = \vec{p}_2(after) - \vec{p}_2(before) = 4kg \cdot \frac{m}{s} \hat{x} = 4 \frac{N}{s} \hat{x}$$