

# שבוע 9

מכניקה של גוף קשיח ותנע זוויתי

מומנט פיתול:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = rF \sin \theta$$

כאשר  $\theta$  היא הזווית בין הווקטורים.

תנע זוויתי של חלקיק:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = mv r \sin \theta = mvd$$

הקשר בין תנע זוויתי למומנט פיתול:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

עבור גוף המסתובב מסביב לציר z:

$$L = (\sum m_i r_i^2) \omega = I \omega$$

חוק 2 של ניוטון עבור סיבוב:

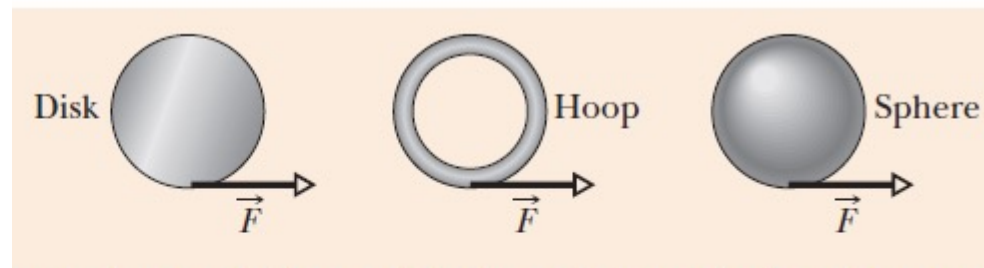
$$\tau = \frac{d}{dt}(I \omega) = I \alpha$$

עבור מערכת מתקיים:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}$$

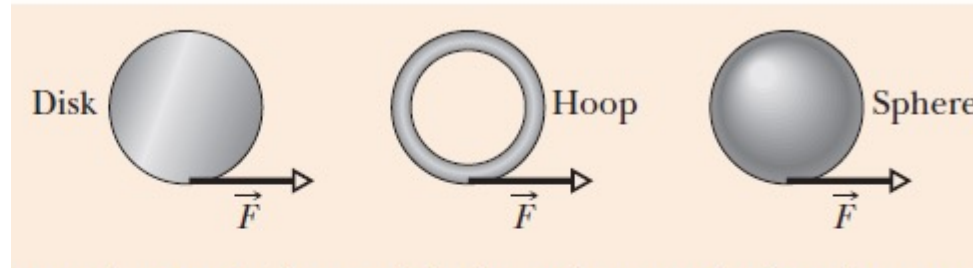
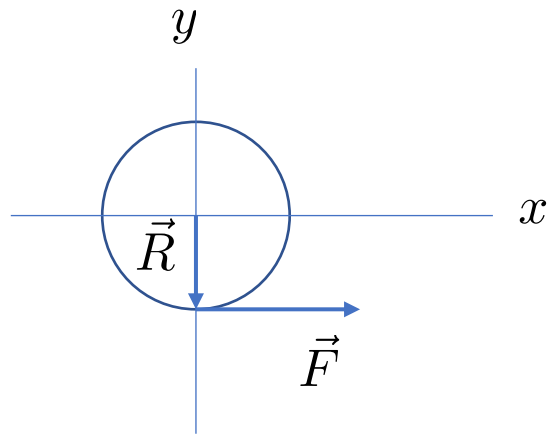
כלומר, אם לא פועלים מומנטי פיתול חיצוניים התנע הזוויתי נשמר.



דיסקה, חישוק וכדור מחוברים לציר קבוע העובר במרכזם. חבל המלופף סביבם גורם להם להסתובב מסביב לציר על ידי הפעלת כוח  $F$  זהה על שלושתם כמראה באיור. לשלשת הגופים יש את אותה המסה  $M$  ורדיוס  $R$  והם מתחילים ממנוחה.

אחרי זמן  $t$ , למי יהיה התנע הזוויתי הכי גדול?

1. דיסקה
2. חישוק
3. כדור
4. זהה עבור כולם



מומנט הפיתול הפועל על כל הגופים הוא זהה:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} = (-R\hat{y}) \times F\hat{x} = RF(\hat{x} \times \hat{y}) = RF\hat{z}$$

(לפי כלל יד ימין הסימן יהיה שלילי - החוצה מהדף, כלומר סיבוב נגד כיוון השעון).  
מומנט הכוח משנה את התנע הזוויתי לפי:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

ולכן, לאחר אינטגרציה נקבל:

$$\vec{L} = RFt\hat{z}$$

המהירויות הזוויתיות, התאוצות הזוויתיות ומומנטי ההתמד שונים אך התנע הזוויתי שווה מכיוון שמומנט הפיתול ומשך פעולתו שווים לכל הגופים.

שימו לב שהמהירות הזוויתית תהיה שונה בגלל שהיא קשורה למומנט ההתמד.

כדור שמסתו  $m = 0.025\text{kg}$  ומהירותו  $v = 400\text{m/s}$  פוגע בדלת שמחוברת לציר אנכי. רוחב הדלת הוא  $L = 1\text{m}$ . הכדור פוגע במרכז

הדלת במרחק  $L/2 = 0.5\text{m}$  מהציר ונתקע בה. מומנט ההתמד של הדלת ביחס לציר הוא  $I = \frac{1}{3}ML^2$  ומסתה  $M = 15\text{kg}$ .

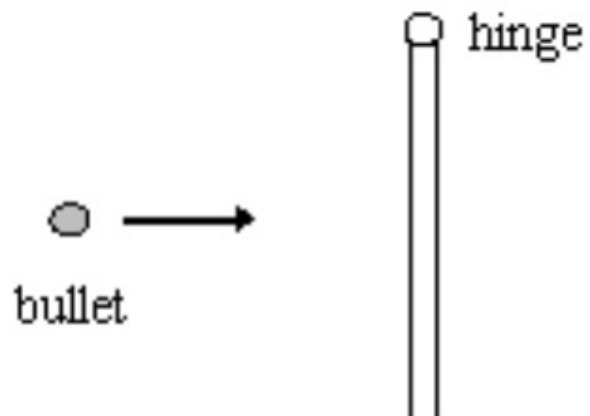
מהי מהירות הסיבוב של הדלת לאחר שהכדור נעצר?

1. 10 רדיאנים לשנייה

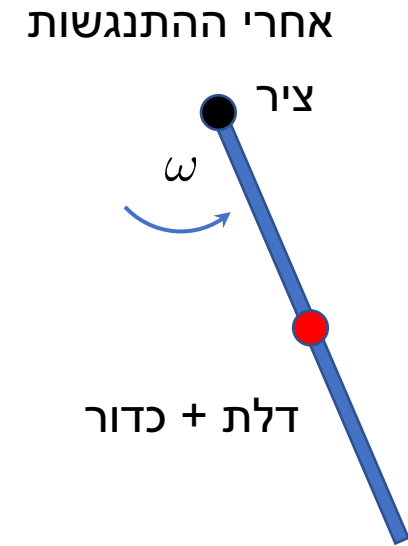
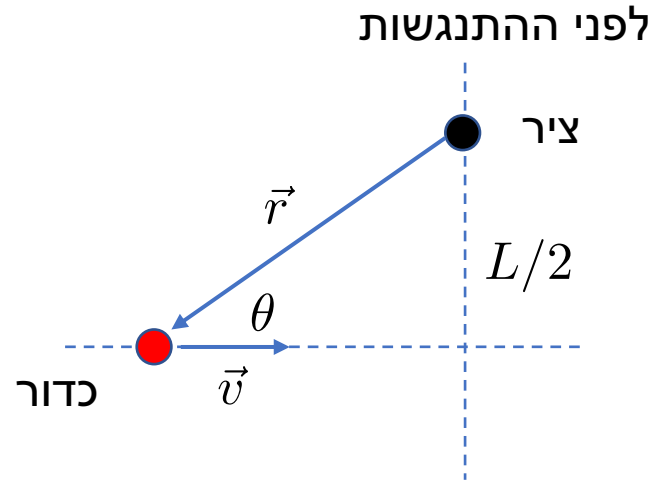
2. 20 רדיאנים לשנייה

3. 1 רדיאנים לשנייה

4. 3 רדיאנים לשנייה



ברגע הפגיעה הכדור מפעיל מומנט פיתול על הדלת וציר הסיבוב מפעיל כוח חיצוני על המערכת ששומר את הדלת מחוברת לציר. מכיוון שפועל כוח חיצוני על המערכת, תנע קווי לא נשמר אבל מכיוון שהכוח פועל על ציר הסיבוב, התנע הזוויתי נשמר.



התנע הזוויתי לפני פגיעת הכדור בדלת הוא:

$$L_{before} = L_{bullet-before} = \vec{r} \times m \vec{v} = mv r \sin\theta = mv \frac{L}{2}$$

לאחר שהכדור נעצר בדלת ושניהם מסתובבים יחד, התנע הזוויתי של המערכת הוא:

$$L_{after} = L_{bullet-aft} + L_{door-aft} = I_{bullet}\omega + I_{door}\omega = \left( m \left( \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} ML^2 \right) \omega$$

מאחר  $L_{after} = L_{before}$

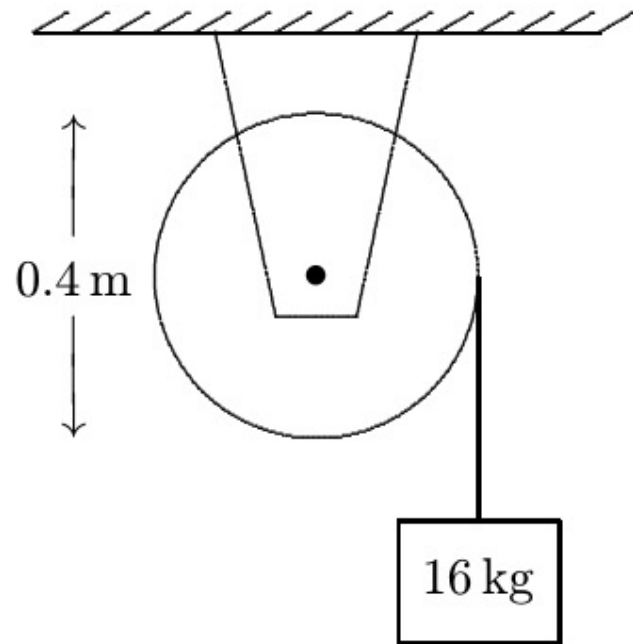
$$\left(m \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}ML^2\right)\omega = \frac{mvL}{2}$$

|

$$\rightarrow \omega = \frac{mv}{\left(\frac{mL}{2} + \frac{2}{3}ML\right)} = \frac{0.025kg \times 400 \frac{m}{s}}{0.0125kg m + 10 kg m} = \frac{10}{10.0125} \frac{rad}{s} = 0.999 \frac{rad}{s}$$



בלוק בעל מסה של 16 ק"ג מחובר לכבל שמלופף מסביב לדיסקה בעלת קוטר של 0.4 מטרים אשר תלויה מהתקרה כמתואר  
 בציור. ציר הסיבוב של הדיסקה חסר חיכוך. מומנט ההתמד של הדיסקה הוא 0.5 מטר רבוע כפול ק"ג. כאשר הבלוק  
 משוחרר והכבל מסובב את הדיסקה, מהי תאוצת הבלוק?



0.15g (a)

0.56g (b)

0.84g (c)

g (d)

1.3g (e)

משוואת הכוחות עבור הבלוק היא:

$$ma_y = T - mg$$

החוק השני של ניוטון עבור סיבוב הדיסקה הוא:

$$I\alpha = -RT = -\frac{D}{2}T$$

(הכוח גורם לדיסקה להסתובב עם כיוון השעון – לכן סימן מינוס).

יש שתי משוואות עם 3 נעלמים,  $a_y, \alpha, T$ ,

אבל, יש קשר פשוט בין התאוצה של מרכז המסה של הגוף לתאוצה הזוויתית של הדיסקה (ששווה לתאוצה המשיקית של הדיסקה):

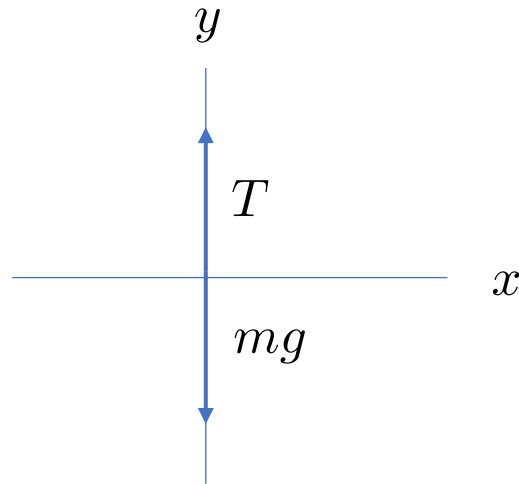
$$a_y = R\alpha = \frac{D}{2}\alpha$$

נציב במשוואות התנועה:

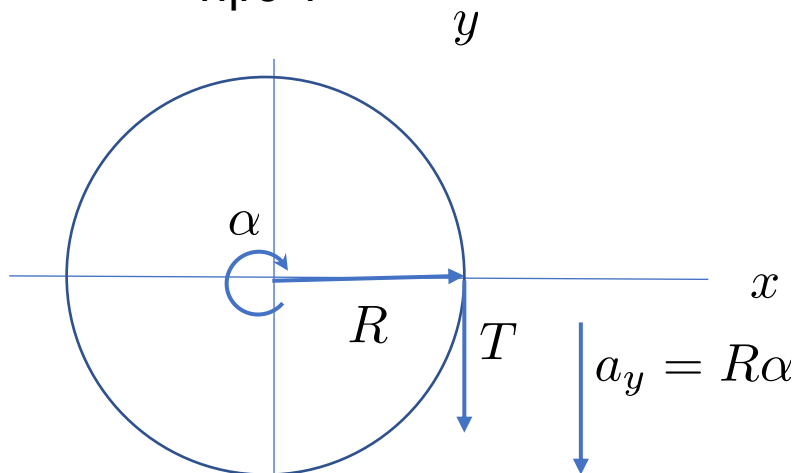
$$\begin{aligned} \frac{2I}{D}a_y &= -\frac{TD}{2} \\ \rightarrow T &= -I\frac{4}{D^2}a_y \end{aligned}$$

דיאגרמות גוף חופשי

בלוק



דיסקה



נציב במשוואה הראשונה:

$$a_y = -\frac{m}{m + \frac{4I}{D^2}} g = -\frac{16}{16 + \frac{2}{0.16}} g = -0.561g$$

0.15g (a)

0.56g (b)

0.84g (c)

g (d)

1.3g (e)