שבוע 10

מכניקה של גוף קשיח

שיווי משקל מכני בגופים קשיחים.

עבור חלקיקים או גופים נקודתיים, דרשנו ש:

$$\sum\vec{F} = 0$$

עבור גוף קשיח נדרוש גם שעבור כל החיצוניים הכוחות הפועלים על הגוף:

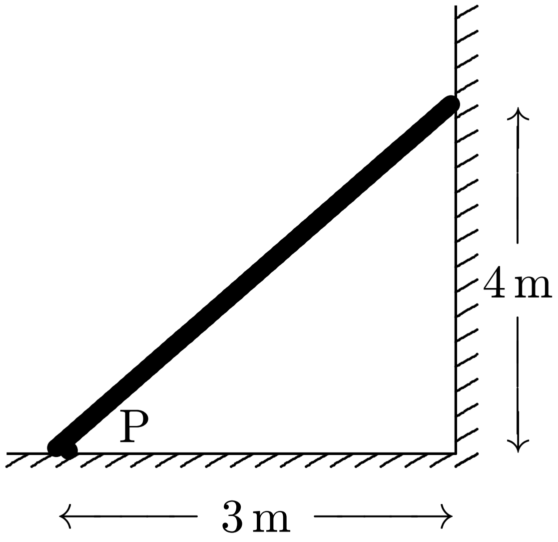
$$\sum\vec{\tau} = 0$$

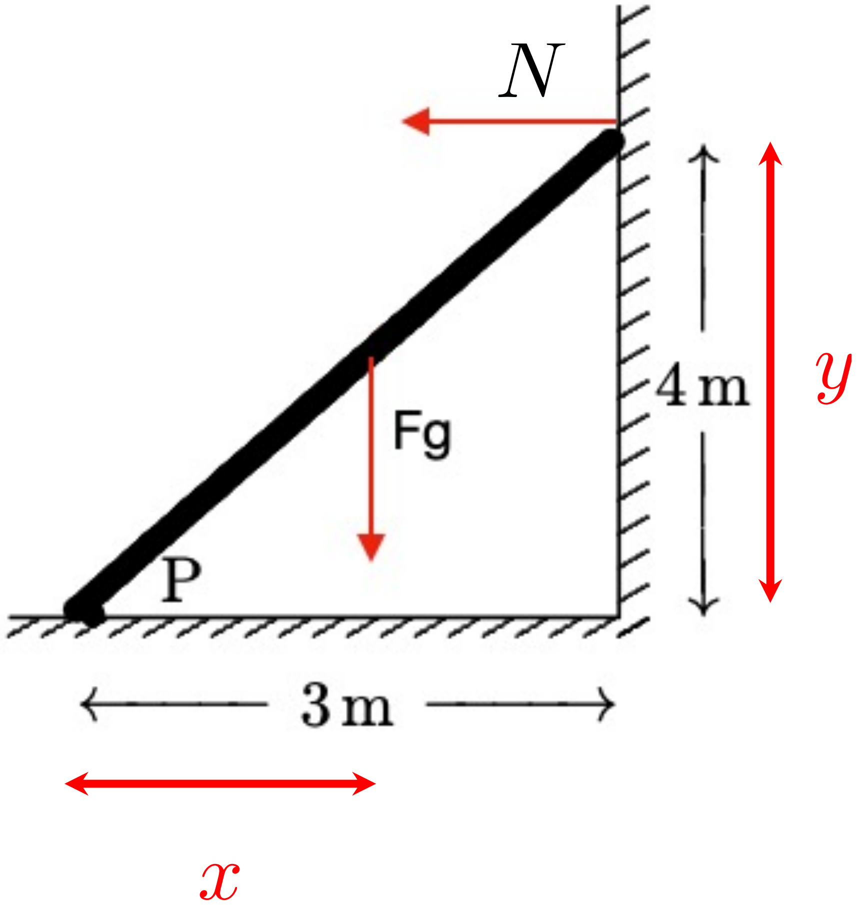
שאלה:
עבור איזה ציר ס׳יבוב זה צריך להתקיים?

תשובה:
התנאי צריך להתקיים עבור כל ציר שהוא.

מוט אחיד בעל משקל של 80 ניוטון נשען על קיר חסר חיכוך כמתואר באיור ונמצא במנוחה.
גודל הכוח שהקיר מפעיל עליו:

1. 40 N
2. 60 N
3. 30 N
4. 20 N
5. 70 N





מכיוון שהמוט במנוחה, סכום המומנטים מסביב לציר P חייב ליהיות 0.
סכום זה הוא:

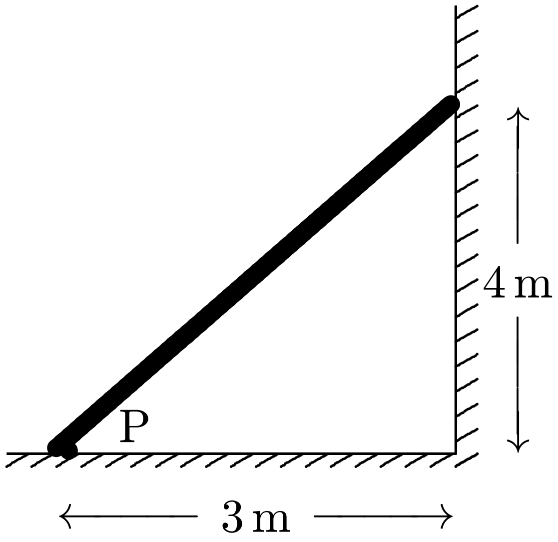
$$Ny - F_g x = 0$$

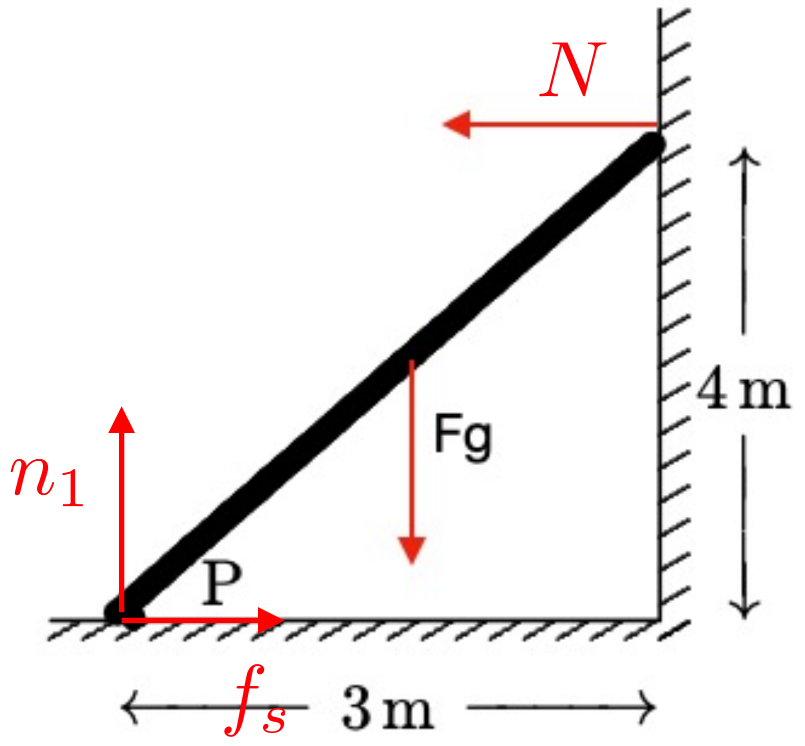
כאשר x היא זרוע הכוח F_g ו y היא זרוע הכוח הנורמלי N.
נציב:

$$Ny = F_g x = 80\frac{3}{2} = 120N \cdot m$$

$$N = \frac{F_g x}{y} = \frac{120}{4m} N = 30N$$

עבור אותה הבעיה – מהם הכוחות הפועלים בין המוט לקרקע?
להזכירכם - משקל המוט 80 ניוטון.





מכיוון שהמוט במנוחה, סכומי הכוחות בצירי x ו y חייבים להיות גם הם 0.
בציר x:

$$N - f_s = 0$$

כאשר f הוא כוח החיכוך עם הקרקע.

ולכן:

$$f_s = 30N$$

בציר y:

$$n - F_g = 0$$

נציב:

$$n = F_g = 80N$$

חישוב של מומנטי התמד.

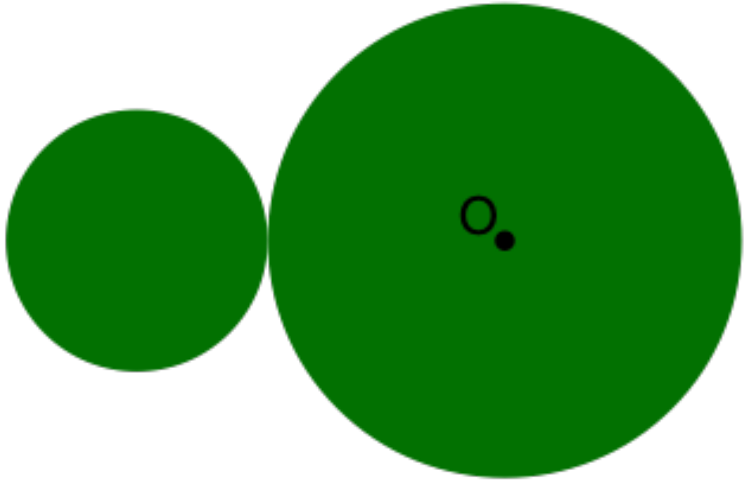
$$I = \sum_{i}^{N} m_i r_i^2$$

משפט הציר המקביל (שטיינר):

$$I = I_{cm} + Md^2$$

דיסקה קטנה בעלת רדיוס של r = 2.0 cm מודבקת לדיסקה גדולה יותר בעלת רדיוס של R = 4.0cm.
הדיסקות מסתובבות מסביב לציר העובר דרך נקודה O הנמצאת במרכז הדיסקה הגדולה. לשתי הדיסקות צפיפות אחידה של $1.40\times10^{3}kg/m^{3}$ ועובי אחיד של 5.00 mm. מהו מומנט ההתמד של המערכת הכוללת עבור סיבוב מסביב לציר O?

1. $6.16\times10^{-5}kg\cdot m^{2}$
2. $3.05\times10^{-4}kg\cdot m^{2}$
3. $4.0\times10^{-5}kg\cdot m^{2}$



הנפח של כל דיסקה הוא $\pi r^2 h$ כאשר h הוא עובי הדיסקה השווה ל 0.005 m.

אם נציין את רדיוס הדיסקה הגדולה ב R ואת רדיוס הדיסקה הקטנה ב r, המסות שלהן הינן

$$M = \rho\pi R^2 h, \text{ ו } m = \rho\pi r^2 h$$

כאשר $\rho = 1400 kg/m^3$ היא הצפיפות.

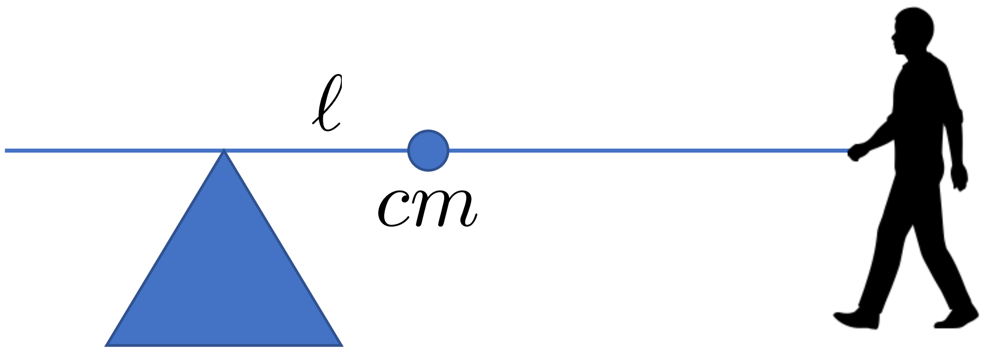
מומנט ההתמד של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R הוא:

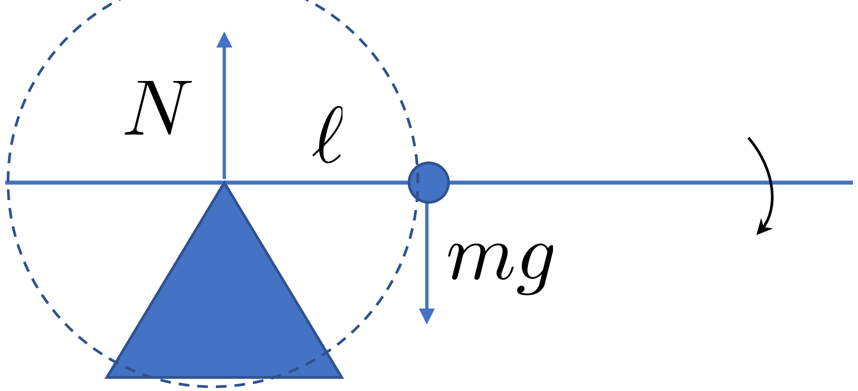
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

בעזרת משפט הציר המקביל (משפט שטיינר) נקבל שמומנט ההתמד של המערכת הכוללת הוא:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + m(r+R)^2 = \rho\pi h[\frac{1}{2}R^4 + \frac{1}{2}r^4 + r^2(r+R)^2] = 6.16\times10^{-5} kg\cdot m^2$$

מוט אחיד בעל מסה m ומומנט התמד ביחס למרכז המסה I_{cm} מוחזק במצב אופקי כמוראה בשרטוט.
המרחק בין נקודת המגע עם המשענת לבין מרכז המסה הוא l. מהו גודל הכוח הנורמלי שהמוט מפעיל על המשענת ברגע שבו משחררים אותו?





נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור תנועה סיבובית:

$$I\alpha = \tau$$

ציר הסיבוב יהיה נקודת המגע עם המשענת. מומנט הפיתול יגרם על ידי מרכז הכבידה:

$$\tau = -mg\ell$$

לפי משפט שטיינר, מומנט ההתמד יהיה:

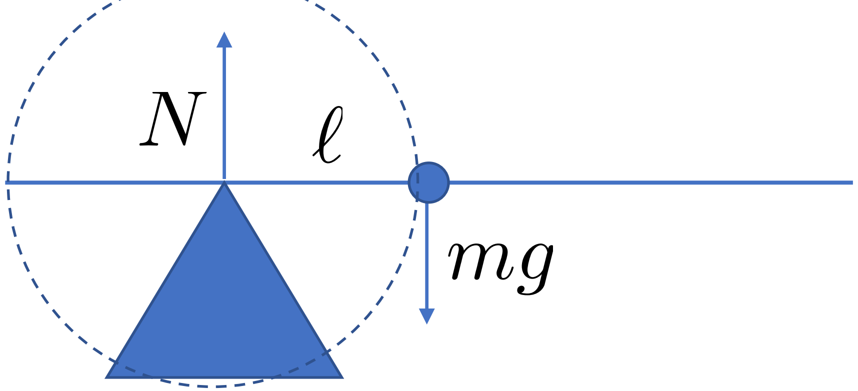
$$I = I_{cm} + m\ell^2$$

לכן נקבל:

$$(I_{cm} + m\ell^2)\alpha = -mg\ell$$

את תאוצת מרכז המסה נקבל מהחוק השני של ניוטון:

$$m\, a_{cm} = N - mg$$



מכיוון שציר הסיבוב בנקודת המגע של המשולש עם המוט, מתקיים הקשר:

$$a_{cm} = \ell\alpha$$

נציב ונקבל שתי משוואות עבור שני נעלמים:

$$m\ell\alpha = N - mg$$

$$(I_{cm} + m\ell^2)\alpha = -mg\ell$$

$$\alpha = -\frac{mg\ell}{(I_{cm} + m\ell^2)}$$

$$N = m\ell\alpha + mg = -\frac{m^2 g\ell^2}{(I_{cm} + m\ell^2)} + mg$$

$$N = mg\left(\frac{I_{cm}}{I_{cm} + m\ell^2}\right)$$

אנרגיה קינטית של גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע:

$$K=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

אנרגיה קינטית של גוף קשיח לא מקובע:

$$K=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

עבודה של גוף קשיח:

$$W=\int \tau d\theta$$

הספק של גוף קשיח:

$$P=\frac{dK}{dt}=\tau\omega$$