שבוע 11

אנרגיה ועבודה של גוף קשיח

אנרגיה קינטית של גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

אנרגיה קינטית של גוף קשיח לא מקובע:

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_{cm}^2$$

עבודה של גוף קשיח:

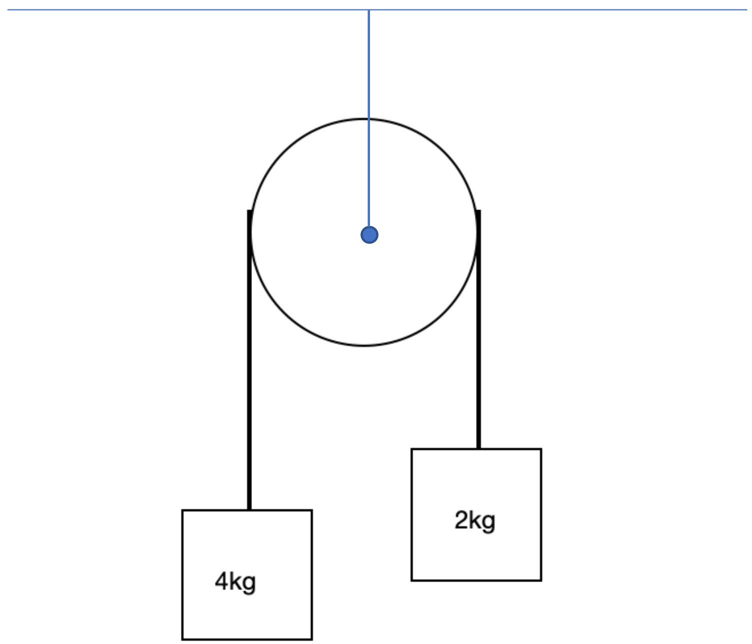
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$$

הספק של גוף קשיח:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

גלגלת בעלת רדיוס של 3.0 ס״מ ומומנט התמד של $4.5\times10^{-3}kgm^2$ תלויה מהתקרה. חבל שקשורים אליו שני בלוקים עובר מעליה. אחד הבלוקים בעל מסה של 2 ק״ג והשני בעל מסה של 4 ק״ג. החבל לא מחליק על הגלגלת. כאשר המהירות של הבלוק הכבד-יותר מגיעה ל 2 מטר לשנייה, האנרגיה הקינטית של הגלגלת היא:

1. 0.15 J
2. 0.30 J
3. 1 J
4. 10 J
5. 20 J



מאחר ומבקשים לדעת את האנרגיה הקינטית, לא מעניין אותנו המומנטים שמופעלים על ידי הבלוקים אלא רק המהירות הזוויתית ומומנט ההתמד שלה.

האנרגיה הקינטית נתונה על ידי:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

מאחר והחבל בעל אורך קבוע, המהירות לאורך כל החבל זהה.

מאחר והכבל לא מחליק על הגלגלת, אין ביניהם מהירות יחסית ומהירות זו שווה למהירות המשיקית של הגלגלת.
לכן, המהירות הזוויתית נתונה על ידי המהירות והרדיוס:

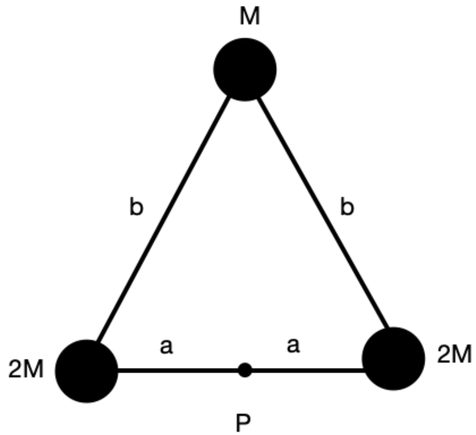
$$v = R\omega$$

נציב ונקבל:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} 4.5\times10^{-3} \left(\frac{2}{3\times10^{-2}}\right)^2 = 10J$$

גוף קשיח המוראה באיור מורכב מ 3 חלקיקים המחוברים על ידי מוטות חסרי מסה. הגוף מסובב סביב ציר העובר דרך נקודה P בניצב למישור הגוף. אם $M = 0.4\ kg$, $a = 30\ cm$ $b = 50\ cm$, כמה עבודה דרושה על מנת להביא את הגוף ממנוחה למהירות זוויתית של $5.0\ rad/s$?

1. 1.3 J
2. 2.4 J
3. 2.6 J
4. 7.8 J



המרחקים מ P לחלקיקים והמסות שלהם הם:

$$r_1 = a\ , m_1 = 2M \text{ (lower left)}$$

$$r_2 = \sqrt{b^2 - a^2}\ ,\ m_2 = M \text{ (top)}$$

$$r_3 = a\ ,\ m_3 = 2M \text{ (lower right)}$$

מומנט ההתמד ביחס לסיבוב מסביב ל P הוא:

$$I = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = (3a^2 + b^2)M$$

מה שמוביל ל:

$$I = 0.208 kg \cdot m^2$$

עבור:

$$M = 0.40 \text{ kg}, a = 0.30 \text{ m}, b = 0.50 \text{ m}.$$

העבודה היא לכן:

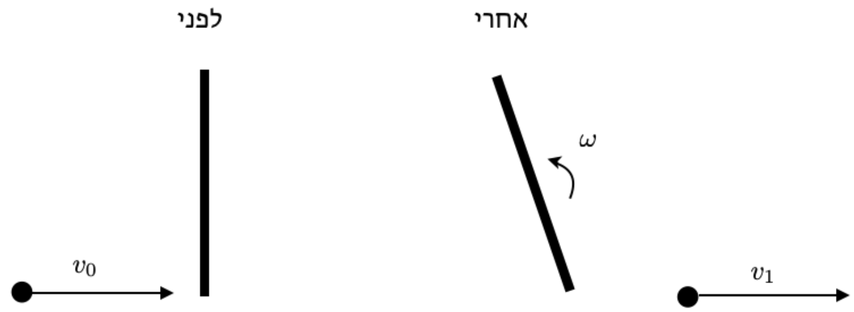
$$W = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.208 kg \cdot m^2)(5.0 rad/s)^2 = 2.6J$$

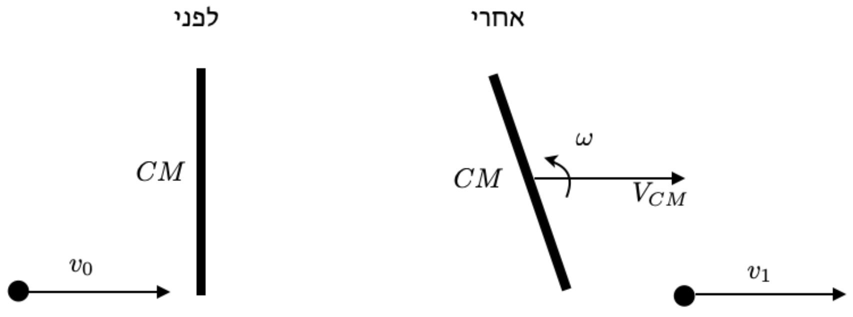
על שולחן אופקי ללא חיכוך מונח מוט בעל צפיפות אחידה, אורך 4 מטרים ומסה 1 ק״ג. בקצה המוט פוגע גוף קטן בעל מסה של 2 ק״ג.

ברגע ההתנגשות מהירות הגוף הקטן היא 3 מטרים לשנייה בכיוון ניצב למוט. ההתנגשות אלסטית.

נתון שמומנט ההתמד של המוט מסביב למרכז המסה שלו הוא 1.33 ק״ג מטר בריבוע.

מהי המהירות הזוויתית של סיבוב המוט סביב מרכז המסה אחרי ההתנגשות?





מכיוון שעל המערכת לא פועלים כוחות חיצוניים, וההתנגשות אלסטית, התנע הקווי, התנע הזוויתי והאנרגיה הקינטית הכוללת נשמרים.

שימור תנע קווי בכיוון האופקי (התנע בכיוון האנכי הוא 0):

$$P_i = P_f$$

$$mv_0 = mv_1 + MV_{cm}$$

שימור תנע זוויתי:

$$L_i = L_f$$

נבחר כציר סיבוב את המיקום של מרכז המסה של המוט לפני ההתנגשות:

$$rmv_0 = rmv_1 + I_{cm}\omega$$

משימור אנרגיה נקבל:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$V_{cm} = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$\omega = \frac{rm}{I_{cm}}(v_0 - v_1)$$

נציב במשוואה השלישית:

$$mv_0^2 = mv_1^2 + \frac{m^2}{M}(v_0 - v_1)^2 + \frac{r^2m^2}{I_{cm}}(v_0 - v_1)^2$$

$$18 = 2v_1^2 + 4(3 - v_1)^2 + 12(3 - v_1)^2$$

$$18 = 2v_1^2 + 16(9 - 6v_1 + v_1^2)$$

$$18 = 2v_1^2 + 144 - 96v_1 + 16v_1^2$$

$$126 - 96v_1 + 18\,v_1^2 = 0$$

$$3v_1^2 - 16v_1 + 21 = 0$$

$$v_1 = \frac{16 \pm \sqrt{256-252}}{6} = \frac{16 \pm 2}{6} = 3\frac{m}{s} \text{ או } 2.333\ \frac{m}{s}$$

האופציה הראשונה מתארת את המצב לפני ההתנגשות.
לכן:

$$v_1 = 2.333\frac{m}{s}$$

$$\omega = 2\frac{rad}{s}$$

$$V_{cm} = 1.333\frac{m}{s}$$

המהירות הזוויתית של גוף קשיח ניתנת על ידי הביטוי $\omega = at^{5/4}$, כאשר t הוא הזמן ו a הוא קבוע.
מהי התלות בזמן של ההספק של מומנט הפיתול הפועל על הגוף?

1. $P = ct^{3/2}$
2. $P = ct^{5/4}$.
3. $P = ct^{5/2}$.
4. $P = c$.
5. חסרים נתונים.

c הוא קבוע

1. $P = ct^{3/2}$
2. $P = ct^{5/4}$.
3. $P = ct^{5/2}$.
4. $P = c$.
5. חסרים נתונים.

c הוא קבוע

$$K(t) = \frac{1}{2} I\omega^2 \propto t^{\frac{5}{2}}$$

לפי משפט אנרגיה-עבודה

$$W = K(t) - K(0) = K(t)$$

$$P = \frac{dW}{dt} \propto t^{\frac{3}{2}}$$

לחילופין:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \propto t^{\frac{1}{4}}$$

$$P = \tau\omega = I\alpha\omega \propto= t^{\frac{1}{4}} t^{\frac{5}{4}} = t^{\frac{3}{2}}$$

טבעת דקה עם רדיוס של $1.2\ \mathrm{m}$ ומסה של $32\ \mathrm{kg}$, מסתובבת במהירות של 280 סיבובים לדקה. מופעל עליה מומנט פיתול קבוע שגורם לעצירה שלה לאחר 15 שניות.

(1) כמה עבודה צריך לעשות על מנת לעצור אותה לגמרי?

(2) מהו ההספק הממוצע?

המהירות הזוויתית ההתחלתית הינה:

ω = (280 rev/min)(2π/60) = 29.3 rad/s.

(1) מאחר ומומנט ההתמד הוא $I = MR^2 = (32kg)(1.2m)^2 = 46.1kg \cdot m^2$, העבודה המבוצעת היא:

$$W = K_2 - K_1 = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}(46.1kg \cdot m^2)(29.3rad/s)^2 = -1.98\times10^4 J$$

(2) מכיוון שפועל על הטבעת מומנט פיתול קבוע, ההספק הממוצע בערך מוחלט יהיה:

$$|P| = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{19.8\times10^3}{15} = 1.32\times10^3 W$$