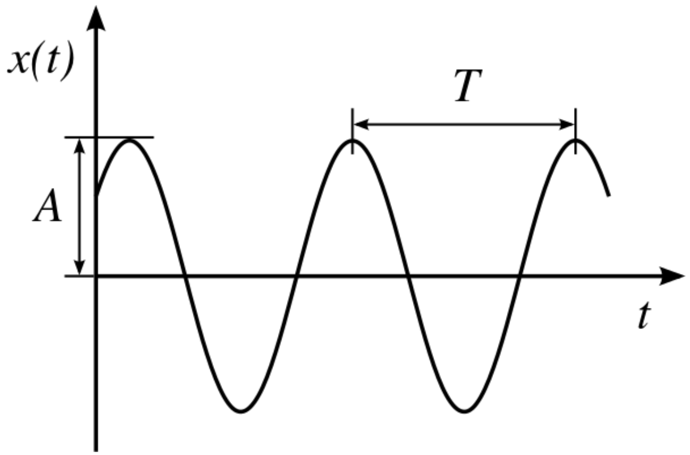
סדנא 12

תנועה הרמונית



התנועה $x(t)$ המתוארת על ידי המשוואה:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

נקראת **תנועה הרמונית פשוטה.**
הפתרון של המשוואה הוא:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

המתאר תנועה מחזורית – תנועה החוזרת על עצמה אחרי זמן מסוים T שנקרא **זמן המחזור**
כאשר:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

נקראת **תדירות זוויתית,**

$$x_m$$

היא התנופה (אמפליטודה) ו

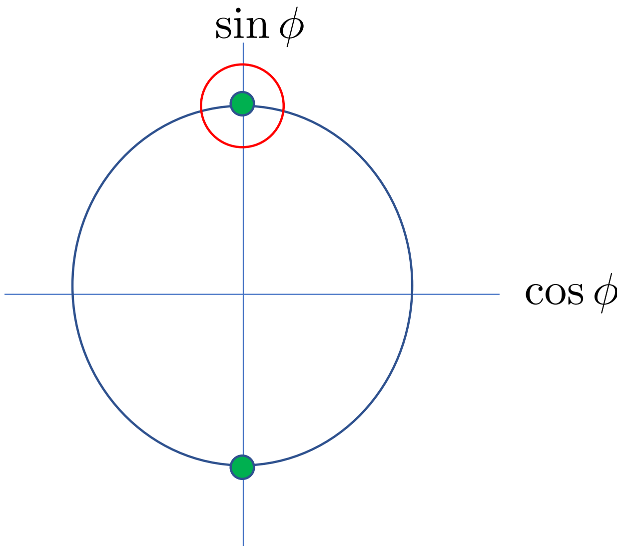
הוא קבוע המופע (פאזה) ϕ

מהירות התנועה מתוארת על ידי:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

הקואורדינטה של גוף המחובר לקפיץ נתונה על ידי $x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$. כאשר $\omega > 0$ היא התדירות ו $A > 0$. היא האמפליטודה. אם המיקום ההתחלתי הוא 0 והמהירות ההתחלתית היא בכיוון השלילי של ציר ה x, קבוע הפאזה הוא:

1. $0\ rad$
2. $\frac{\pi}{2}\ rad$
3. $\pi\ rad$
4. $\frac{3}{2}\pi\ rad$
5. $2\pi\ rad$



נתון שבזמן 0 המיקום הוא 0:

$$x(0) = Acos(\phi) = 0$$

זה יכול להתקיים אך ורק אם:

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

כאשר n הוא מספר שלם (חיובי או שלילי).

נתון גם שהמהירות בזמן 0 היא שלילית:

$$v(0) = -\omega Asin(\phi) < 0$$

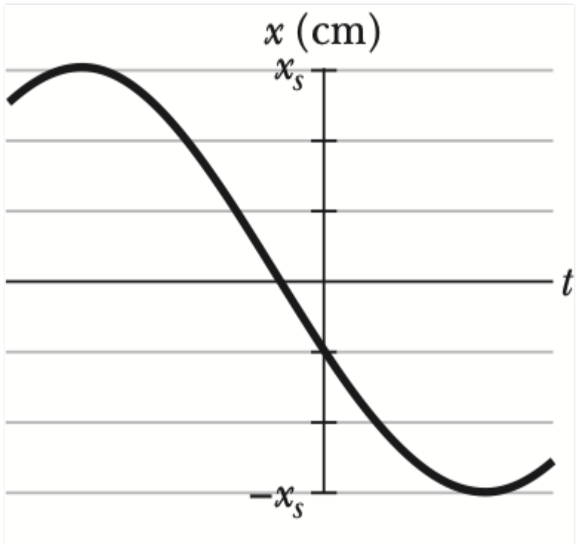
לכן $sin\phi$ צריך להיות חיובי. זה מתקיים אם:

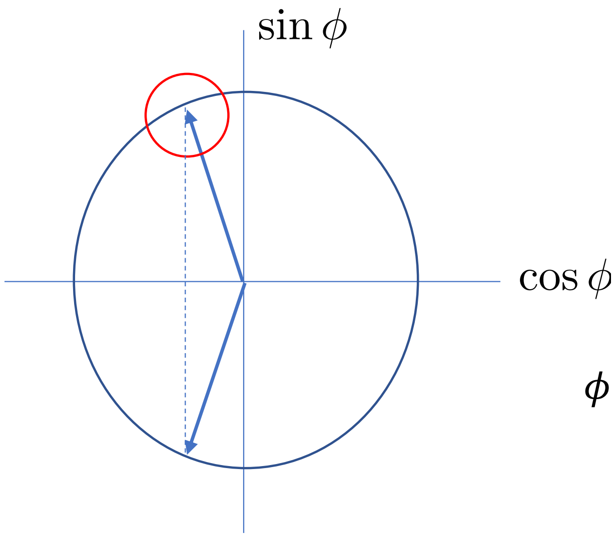
$$\phi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

מבין האפשרויות הנתונות רק $\phi = \frac{\pi}{2}$ עונה לדרישות.

מהו קבוע הפאזה עבור תנועה הרמונית עם פונקציית מיקום $x(t)$ הנתונה באיור, אם נתון שהמיקום של החלקיק נתון על ידי $x = x_s cos(\omega t + \phi)$?

הסקאלה בציר האנכי נתונה על ידי $x_s = 6.0\ cm.$





מהגרף אנחנו רואים שההעתק המקסימלי הוא $x_m = 6cm$ ושב, $t = 0$ $\quad x_0 = -2.00cm$

לכן:

$$x(0) = x_m cos(\phi) = 6.0\ cos(\phi) = -2cm$$

$$cos(\phi) = -\frac{1}{3}$$

$$\phi = cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx \pm 1.91 rad + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

שימו לב שהנגזרת של פונקציית המיקום לפי הזמן (כלומר המהירות) נתונה על ידי:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow v(0) = -\omega x_m \sin(\phi)$$

פונקציית הסינוס חיובית עבור $0 < \phi < \pi$ ושלילית עבור $-\pi < \phi < 0$ כך שכדי לקבל מהירות שלילית ב $t = 0$ כמוראה בגרף רק הפתרון

$$\phi = 1.91 rad + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

נכון.

חלקיק מתנדנד בין $x=-x_m$ לבין $x=+x_m$ בתנועה הרמונית פשוטה עם זמן מחזור T.
ברגע $t=0$ הוא נמצא ב $x=x_m$

ברגע $t=0.8T$:

1. הוא נמצא בין $x=0$ ו $x=-x_m$ ונע לקראת $x=-x_m$.
2. הוא נמצא בין $x=0$ ו $x=+x_m$ ונע לקראת $x=+x_m$.
3. הוא נמצא במנוחה ב $x=+x_m$
4. הוא נמצא במנוחה ב $x=0$ ונע לקראת $x=-x_m$.
5. הוא נמצא במנוחה ב $x=0$ ונע לקראת $x=+x_m$.

התנועה מתוארת על ידי:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

כאשר:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

והמהירות מתוארת על ידי:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

נתון שבזמן $t = 0$ המיקום הוא $x = x_m$:

$$x(0) = x_m \cos\phi = x_m$$

לכן,

$$\cos\phi = 1$$

ו

$$\phi = 0 + 2\pi n$$

תנועת החלקיק לכן מתוארת על ידי:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

ברגע $t = 0.8T$

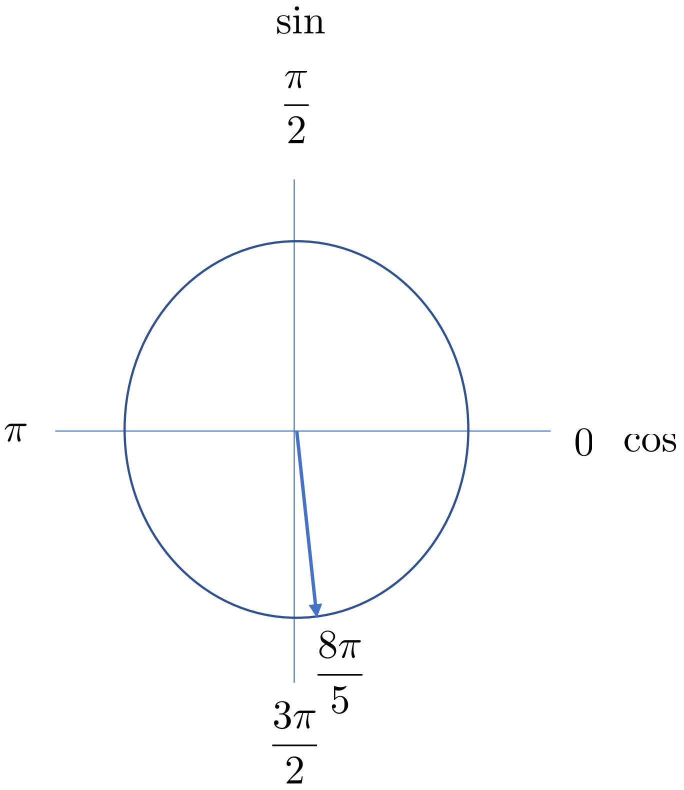
$$x(0.8T) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{4T}{5}\right) = x_m \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

$$\frac{8\pi}{5} = \frac{16\pi}{10}$$

נרשום:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{15\pi}{10} < \frac{16\pi}{10} < \frac{20\pi}{10} = 2\pi$$

לכן,



$$\mathrm{x_m} > \mathrm{x_m}\cos\frac{8\pi}{5} > 0$$

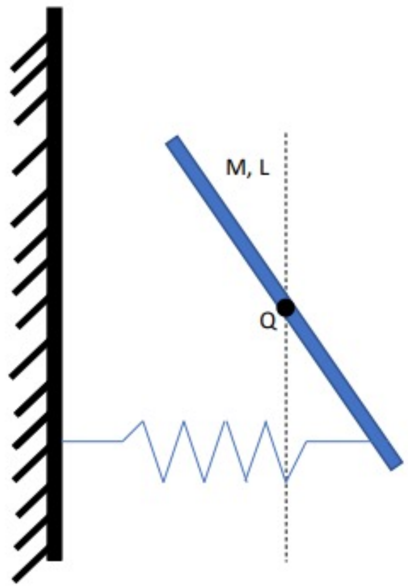
$$-\omega\, \mathrm{x_m}\sin\frac{8\pi}{5} > 0$$

לכן החלקיק נמצא בין 0 ל x_m ונע ימינה (לכיוון x_m)

1. הוא נמצא בין $x = 0$ ו $x = -x_m$ ונע לקראת $x = -x_m$.
2. הוא נמצא בין $x = 0$ ו $x = +x_m$ ונע לקראת $x = +x_m$.
3. הוא נמצא במנוחה ב $x = +x_m$
4. הוא נמצא במנוחה ב $x = 0$ ונע לקראת $x = -x_m$.
5. הוא נמצא במנוחה ב $x = 0$ ונע לקראת $x = +x_m$.

האיור מתאר מבט מלמעלה על מערכת שכוללת מוט אחיד בעל מסה M הנמצא על שולחן חסר חיכוך ומחובר בקצהו לקפיץ חסר מסה (הקצה השני של הקפיץ מחובר לקיר). כאשר הקפיץ רפוי, המוט מקביל לקיר. נתון כי קבוע הקפיץ הוא k וכי המוט יכול להסתובב סביב ציר שעובר במרכזו.

מהי התדירות של תנודות קטנות שנגרמות כאשר מותחים מעט את קצה המוט ומשחררים?



יש לנו גוף קשיח המסתובב מסביב לציר קבוע Q וקפיץ המפעיל כוח:

$$F = -k\Delta\ell$$

כאשר $\Delta\ell$ היא התארכות הקפיץ. הכוח מפעיל מומנט פיתול:

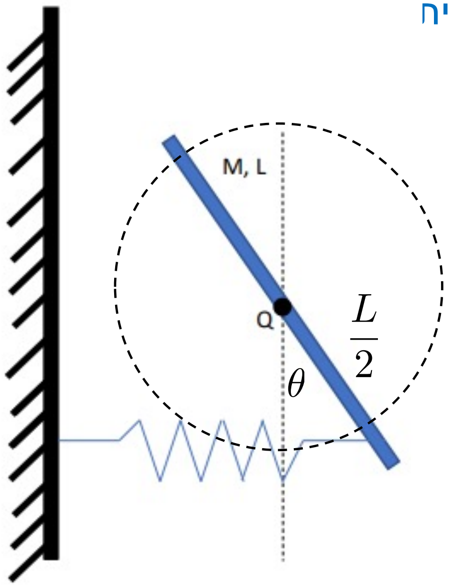
$$\tau = \mathrm{FR} = -\mathrm{k}\Delta\ell\mathrm{R}$$

השווה בקירוב של זווית קטנה ל:

$$\tau = -\mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\theta\right)\frac{\mathrm{L}}{2} = -\mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)^2\theta$$

הסבר:

על מנת לחשב את התארכות הקפיץ נזכור שהקפיץ קשור לקצה של המוט, והמוט מבצע תנועה מעגליה



$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

השינוי באורך הקפיץ הוא:

$$\Delta\ell = \ell' - \ell = \sqrt{(\ell+\Delta x)^2 + \Delta y^2} - \ell$$

כאשר:

$$\Delta x = R\sin\theta \quad \Delta y = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\theta$$

עבור תנודות קטנות, הזווית θ ביחס לאנך קטנה ולכן:

$$\cos\theta \approx 1 \qquad \sin\theta \approx \theta$$

ולכן:

$$\Delta x \approx R\theta \qquad \Delta y \approx 0$$

האורך יהיה לכן בקירוב:

$$\Delta\ell \approx \sqrt{(\ell + R\theta)^2} - \ell \approx R\,\theta$$

נציב ונקבל:

$$\tau = -k\left(\frac{L}{2}\right)^2 \theta$$

חוק 2 של ניוטון עבור סיבובים, מתאר את התאוצה הזוויתית, שהיא נגזרת שנייה של הזווית:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

נציב:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\left(\frac{L}{2}\right)^2 \theta$$

קיבלנו משוואה מהצורה:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

כאשר:

$$\omega^2 = \frac{k}{I}\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{I}\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

מומנט ההתמד של מוט עבור סיבוב מסביב למרכז המסה הוא:

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

נציב ונקבל שהתדירות עבור תנודות קטנות הינה:

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12k}{ML^2}\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3k}{M}}$$

השוו זאת לתדירות תנודות קטנות של מסה המחוברת לקפיץ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

חלקיק מבצע תנועה הרמונית לאורך ציר x עם משרעת תנועה A.

בנקודה מסויימת האנרגיה הקינטית היא $K = 5J$ והאנרגיה הפוטנציאלית היא $U = 3J$.

הניחו שהאנרגיה הפוטנציאלית היא 0 ב $x = 0$

כאשר $x = A$, האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית יהיו:

1. $K = 5J, U = 3J$
2. $K = 5J, U = -3J$
3. $K = 8J, U = 0$
4. $K = 0, U = 8J$
5. $K = 0, U = -8J$

במקרה של תנועה של מסה המחוברת לקפיץ ללא חיכוך, האנרגיה המכנית נשמרת. האנרגיה הכוללת במערכת של קפיץ היא:

$$E = K + U = 3 + 5 = 8J$$

כאשר החלקיק נמצא במרחק המקסימלי מנקודת שיווי המשקל, $x = A$, האנרגיה הפוטנציאלית היא מקסימלית והמהירות היא 0 ולכן גם האנרגיה הקינטית מתאפסת.

ולכן:

$$E = U = 8J, \qquad K = 0$$

גוף בעל מסה m מתנודד עם משרעת A בקצה של קפיץ בעל קבוע קפיץ k. המהירות המקסימלית היא:

1. $A\sqrt{k/m}$
2. A^2k/m
3. $A/\sqrt{m/k}$
4. Am/k
5. A^2m/k

במקרה של מסה המחוברת לקפיץ (כאשר אין כוחות אחרים הפועלים על הגוף) משוואת התנועה היא:

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

הפתרון הכללי למשוואה הנ"ל הוא:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

כאשר $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

המהירות בתנועה מתוארת על ידי:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

הגודל המקסימלי הוא כאשר $\sin(\omega t + \phi) = \pm 1$.

גודל המהירות המקסימלי הוא במקרה זה:

$$|v|_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$