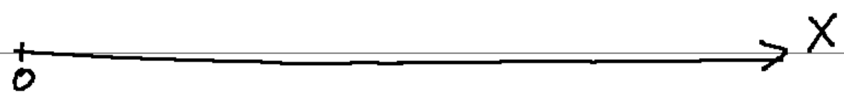
1. קינמטיקה

קינמטיקה זה תיאור תנועת גופים.

דינמיקה זה תיאור הגורם לתנועת גופים.

1.1. תנועה חד ממדית - מהירות, תאוצה ומיקום

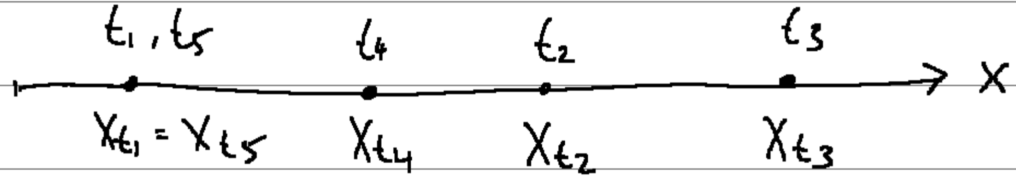
אנו רוצים לחשוב על גוף (חלקיק) שזז רק בממד אחד (נגיד לאורך קו).



המיקום שלו ניתן על ידי ערך x כפונקציה של זמן $x(t)$.

נגיד שבזמן $t=t_1$, הגוף נמצא ב $x=x_{t_1}$. אפשר לתת את המיקום בזמנים שונים.

דוגמא:



שינוי המקום ניתן על ידי <u>העתק</u>:

$$\boxed{\Delta X_{12} = X_2 - X_1}$$

למשל העתק בין זמנים t_1 ו-t_2 הוא:

$$\Delta X_{t_1 t_2} = X_{t_2} - X_{t_1}$$

להעתק יש גודל וכיוון.

גודל: $|\Delta X_{12}| = |X_2 - X_1|$

כיוון: $\Delta X_{12} > 0 \quad \longrightarrow$

בחירת הכיוון והאפס של x היא שלנו, אבל ברגע שבחרנו אותה צריך להישאר איתה.

העתק זה שינוי המקום של הגוף, למשל:

$$\Delta X_{t_1 t_5} = 0 \ .$$

הדרך זה המרחק שהגוף נע במשך התנועה.

כדי לחשב את הדרך צריך לשבור את התנועה לחלקים שבהם כיוון התנועה קבוע:

$$\Delta X_{t_1t_5} = \Delta X_{t_1t_3} + \Delta X_{t_3t_5}$$

ואז לחבר אותם עם ערך מוחלט:

$$S_{t_1t_5} = |\Delta X_{t_1t_3}| + |\Delta t_{t_3t_5}|$$

$$= |X_{t_3} - X_{t_1}| + |X_{t_5} - X_{t_3}|$$

$$= 2X_{t_3} - X_{t_1} - X_{t_5} \neq 0.$$

אפשר לרשום:

$$\boxed{S_{12} = \sum_i |\Delta X_i|}$$

ΔX_i הם חלקי תנועה באותו כיוון

מהירות ממוצעת:

$[\bar{V}] = ms^{-1}$

$$\boxed{\bar{V}_{t_1t_2} = \frac{\Delta X_{t_1t_2}}{\Delta t_{12}} = \frac{X_{t_2}-X_{t_1}}{t_2-t_1}}$$

למהירות ממוצעת יש גודל וכיוון:

$$\bar{V}_{t_1t_2} = \frac{X_{t_2}-X_{t_1}}{t_2-t_1} > 0 \quad ,$$

$$\bar{V}_{t_1t_5} = 0 \quad ,$$

$$\bar{V}_{t_2t_4} = \frac{X_{t_4}-X_{t_2}}{t_4-t_2} < 0 \quad .$$

למהירות <u>הסקלרית</u> הממוצעת יש רק גודל:

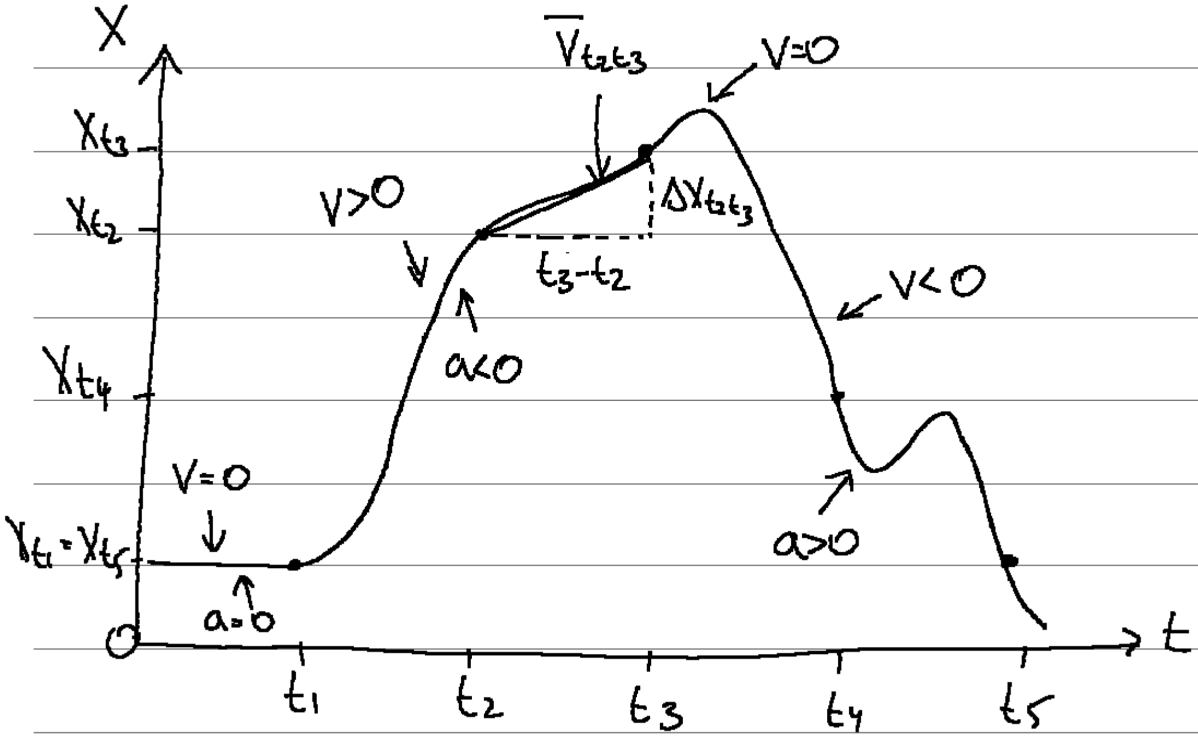
$$\boxed{\bar{V}^s_{t_1t_2} = \frac{S_{t_1t_2}}{t_2-t_1}}$$

$$\bar{V}^s_{t_1t_5} \neq 0$$

באנגלית: מהירות = velocity ,

מהירות סקלרית = speed .

נגיד שאני נותן את המיקום של הגוף בכול הזמן :



מהירות רגעית היא מהירות ממוצעת כאשר גודל קטע הזמן שואף לאפס:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

זה בדיוק הנגזרת של המיקום.

מהירות רגעית:

$$\boxed{V = \frac{dx}{dt}}$$

$[V] = ms^{-1}$

מהירות רגעית היא פונקציה של זמן, ויכולה להשתנות.

תאוצה היא שינוי המהירות (הרגעית) בזמן.

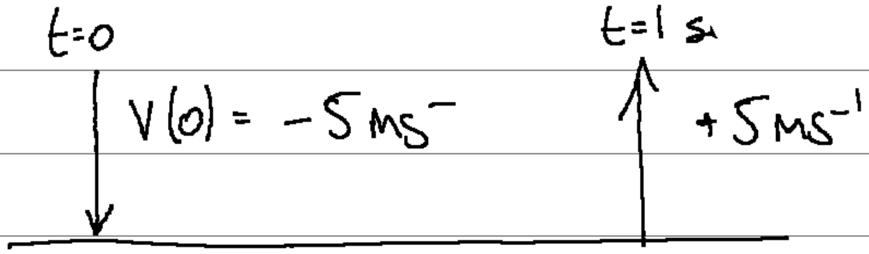
<u>תאוצה ממוצעת</u>:

$$\boxed{\bar{a}_{t_1t_2} = \frac{\Delta V_{t_1t_2}}{\Delta t_{12}} = \frac{V_{t_2} - V_{t_1}}{t_2 - t_1}}$$

<u>תאוצה רגעית</u>:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

שאלה:



מהירות ממוצעת: $\bar{V} = 0$

תאוצה ממוצעת:

$$\bar{a} = \frac{5-(-5)}{1-0}\ ms^{-2}$$

$$= +10\ ms^{-2}.$$

שאלה: $X(t) = 8 - 6t + t^2$

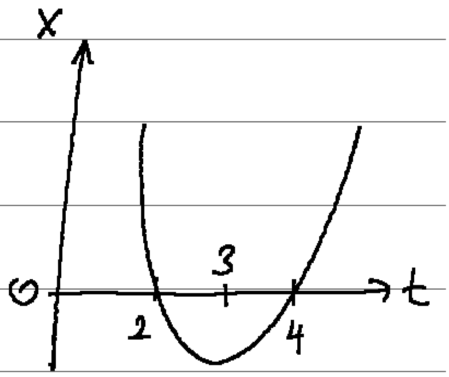
מהירות? $V = -6+2t$

תאוצה? $a = +2$

מה הגובה המינימלי של התנועה?

$V=0 \Rightarrow t_m = 3\ sec$

$X(3) = -1\ m.$



1.2. מיקום מהירות ותאוצה

תנועה: $X = C_1 + C_2 t + C_3 t^2$

אז, $V = C_2 + 2C_3 t$

$a = 2C_3$

זו תנועה עם תאוצה קבועה, ואפשר לרשום:

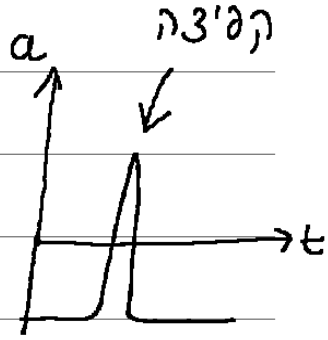
$$\boxed{\begin{aligned} X &= X_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} a_0 t^2 \\ V &= V_0 + a_0 t \\ X_0 &= X(0), \quad V_0 = V(0), \quad a_0 = a(0) \end{aligned}}$$

דוגמא חשובה: תנועה של נפילה או זריקה: כוח המשיכה גורם לתאוצה קבועה כלפי כדור הארץ של:

$$a_g = -g, \quad g = 9.8\ ms^{-2}.$$

שאלות:

- אני זורק כדור למעלה, האם התאוצה שלו במשך התנועה עד תפיסה שווה לאפס בזמן מסויים?



- אותה שאלה עם הקפצת כדור.

- אני עוזב כדור בגובה 1.71m. כמה זמן עד שיגיע לרצפה?

$$X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$0 = 1.71\text{m} + 0 - \frac{1}{2} g t_f^2$$

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2 \times 1.71}{g}}\ \text{s} \simeq \underline{0.59\,\text{s}}\,.$$

אם התאוצה לא קבועה: $\frac{d^2x}{dt^2} \neq 0$, אז

צריך להשתמש באינטגרציה:

$$\boxed{V = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow X = X_0 + \int_0^t V(t')\,dt'}$$

<u>משל:</u> גוף מתחיל בנקודה $x_0=0$, בזמן $t=0$,
ונע עם מהירות

$$V=\sin t$$

מה המקום שלו כפונקציה של זמן?

$$X(t) = 0 + \int_0^t \sin t' \, dt'$$

$$= \left[-\cos t'\right]_0^t$$

$$= \underline{1-\cos t}\,.$$

התאוצה הרגעית נתונה באותה צורה:

$$\boxed{a=\frac{dV}{dt} \Leftrightarrow V=V_0+\int_0^t a(t')\,dt'}$$

אם התנועה לא מתחילה ב $t=0$, אז פשוט מחליפים $t \to t-t_0$ כך:

תאוצה קבועה: $$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$$

תאוצה לא קבועה: $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')dt'$$

<u>שאלה:</u> איש רץ 100m ב- 10s. את הקטע הראשון, באורך $l = 10m$, הוא רץ בתאוצה קבועה ממצב מנוחה. לאחר מכן הוא ממשיך במהירות קבועה.

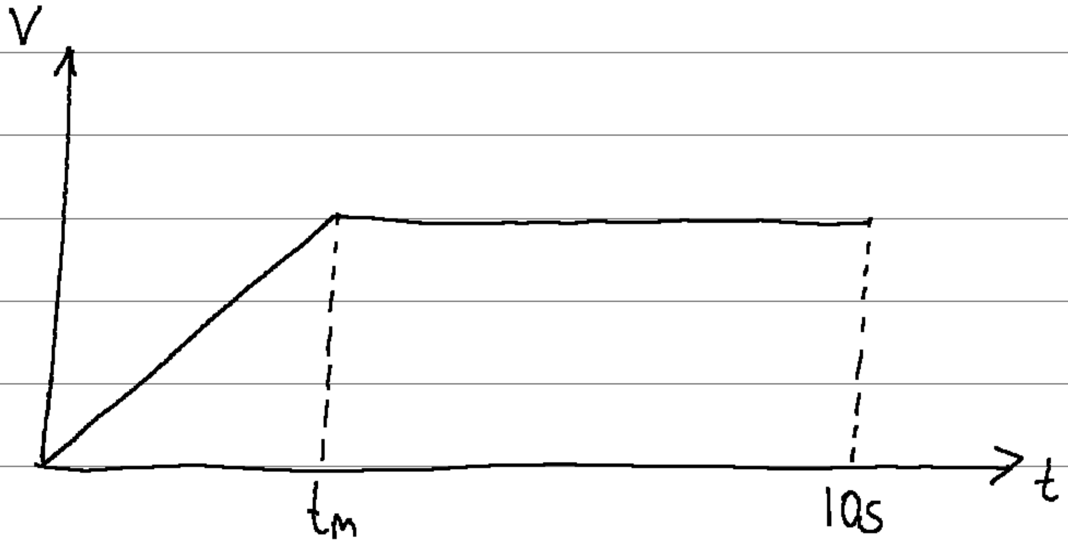
1) מהי המהירות הממוצעת שלו?

2) מהי המהירות המרבית שלו?

תשובה:

1) $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\bar{v} = \frac{100m}{10s} = \underline{10ms^{-1}}$.

2) מהירות:



$$X(t_m) = 10m$$

תאוצה קבועה: $X = X_0 + V_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$

$$V = V_0 + a_0(t-t_0)$$

חלק ראשון: $X_0=0,\ V_0=0,\ t_0=0,\ t=t_m$

$\boxed{10m = \frac{1}{2}a_0 t_m^2}$ ① , $\boxed{V_m = a_0 t_m}$ ②

חלק שני: $X = X_m + V_m(t-t_m)$

$\boxed{100m = 10m + V_m(10s - t_m)}$ ③

משתמשים ב-② ב-① :

$$10m = \frac{1}{2} V_m t_m$$

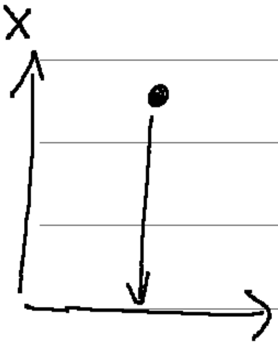
③ $\Rightarrow \quad 90m = V_m \cdot 10s - V_m t_m$

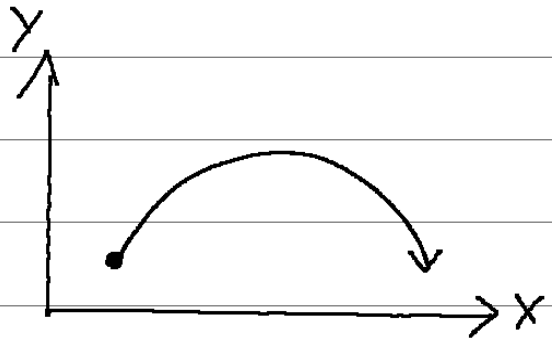
$$= V_m \cdot 10s - 20m$$

$$\Rightarrow V_m = \frac{110m}{10s} = \underline{11ms^{-1}}.$$

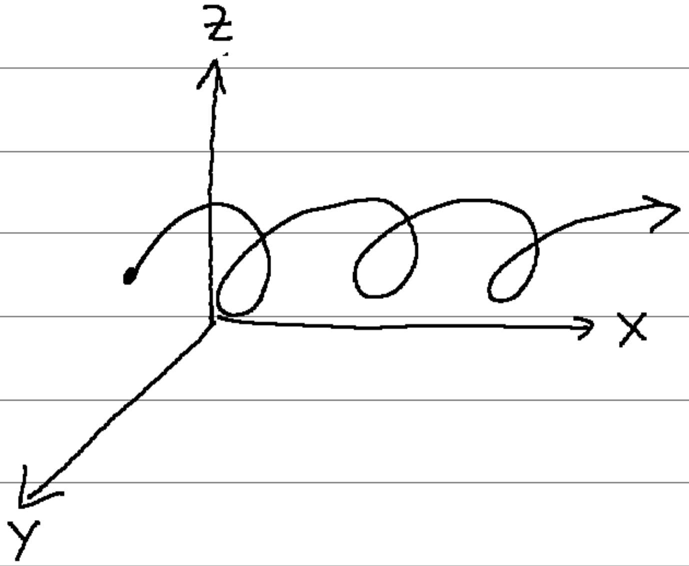
13. תנועה בשניים ושלושה ממדים

העולם שלנו הוא תלת-ממדי, אך יש אפשרות לתנועה ב 1,2,3 ממדים.





ממד 1   2 ממדים



3 ממדים

קואורדינטות קרטזיות בנויות על קווים ישרים ניצבים זה לזה: z, y, x.

נקודה ניתנת על ידי השלישייה: $P: (x,y,z)$

מרחק בין שני נקודות מחושב כ-

$$S_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

לכל קואורדינטה יש מהירות ותאוצה בלתי תלויים:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

$$a_i = \frac{dV_i}{dt}, \quad i = x, y, z.$$

העתק הוא גם שלישיה:

$$\Delta_{12} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

והדרך במשך תנועה מחושבת כ-

$$S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\, dt.$$

1.3.3. וקטורים

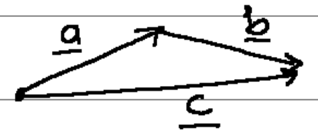
אפשר לקרוא לשלישיה (או זוג) של קואורדינטות וקטור:

$$\underline{r} = (x,y,z)$$

לפעמים רושמים וקטור כ- $\vec{r}$.

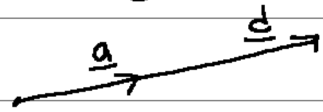
יש לוקטורים פעולות:

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$



$$\left(c_x = a_x + b_x \, , \; c_y = a_y + b_y \, , \; c_z = a_z + b_z \right)$$

$$\underline{d} = \alpha \underline{a}$$



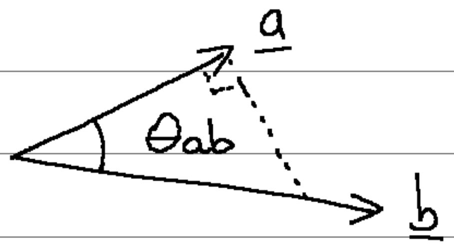
$$\left(d_x = \alpha a_x \, , \; d_y = \alpha a_y \, , \; d_z = \alpha d_z \right)$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

המכפלה הסקלרית נותנת את הזווית בין הוקטורים:

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\theta_{ab}$$



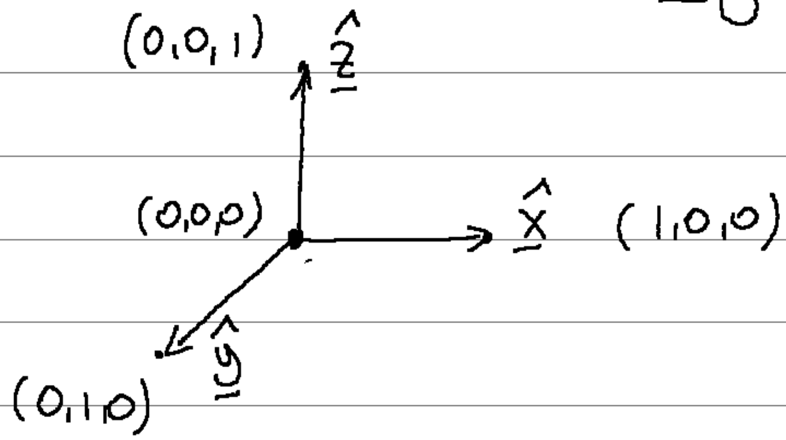
$$\hat{\underline{x}}\cdot\hat{\underline{y}} = ?$$

לכל וקטור אפשר לבנות וקטור יחידה:

$$\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \qquad (|\hat{\underline{a}}| = 1)$$

1.3.5 וקטורים של מקום ותנועה

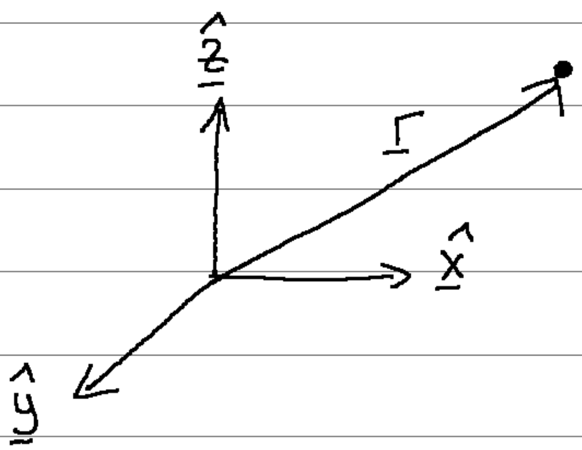
על ראשית הקואורדינטות אפשר לבנות וקטורים יחידים: $\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{y}}, \hat{\underline{z}}$



וקטור המקום הוקטור העתק המחבר את
ראשית הקואורדינטות עם הגוף:

$$\underline{r} = x\,\hat{\underline{x}} + y\,\hat{\underline{y}} + z\,\hat{\underline{z}}$$

$$\underline{r} = (x, y, z)$$



שינוי המיקום (העתק) ניתן על ידי:

$$\Delta\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

מהירות ותאוצה: $\underline{v} = v_x\,\hat{\underline{x}} + v_y\,\hat{\underline{y}} + v_z\,\hat{\underline{z}}$

$$\boxed{\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} \quad , \quad \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}}$$

מהירות ממוצעת:

$$\boxed{\bar{\underline{v}} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}}$$

תאוצה ממוצעת:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}}$$

תנועה עם תאוצה קבועה: $\underline{a}(t) = \underline{a}_0$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(t) &= \underline{v}_0 + \underline{a}_0 (t - t_0) \\ \underline{r}(t) &= \underline{r}_0 + \underline{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \underline{a}_0 (t - t_0)^2 \end{aligned}}$$

צורה וקטורית נוחה לניתוח כללי, אבל לחישובים
כמעט תמיד יש לעבור לקואורדינטות.