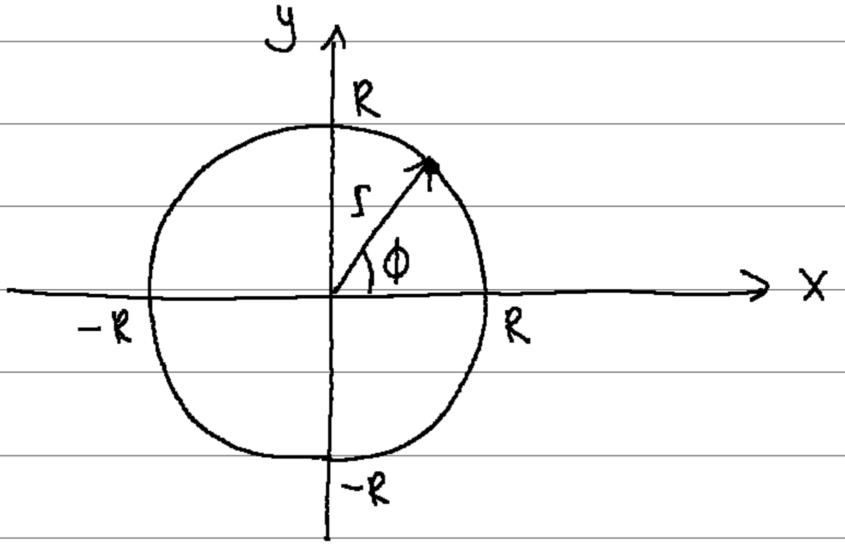
2.1. תנועה מעגלית

תנועה מעגלית בשני ממדים היא כך שהגוף נמצא במרחק קבוע מנקודה מסוימת



R זה המרחק הקבוע מהגוף לראשית

$\underline{r}$ זה הוקטור לגוף מהראשית $\quad |\underline{r}| = R$

ϕ היא הזווית בין $\underline{r}$ לציר x

2.1.1 תנועה במהירות זוויתית קבועה

תקופת סיבוב ("period") T , $[T] = s$

תדירות ("frequency") $f = \frac{1}{T}$, $[f] = s^{-1}$

מהירות זוויתית ("angular velocity")

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \qquad [\omega] = \text{rad}\ s^{-1}.$$

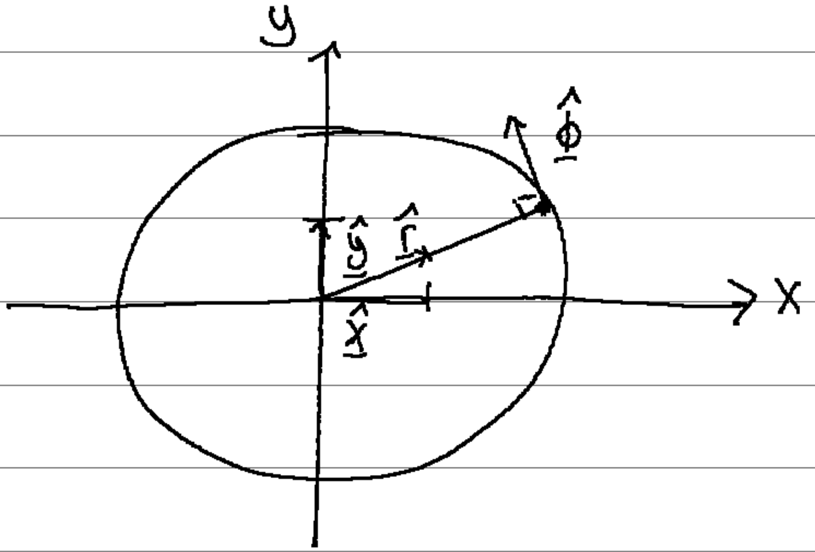
גודל המהירות (מהירות סקלרית) הוא:

$$|\underline{v}| = \frac{2\pi R}{T} = \omega R.$$

אפשר לתאר את התנועה בקואורדינטות
קוטביות ("polar") או קרטיזיות.

$$\underline{\hat{r}} \cdot \underline{\hat{\phi}} = 0$$

$$\underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{y}} = 0$$



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\hat{r}} &= \cos\phi\ \underline{\hat{x}} + \sin\phi\ \underline{\hat{y}} \\ \underline{\hat{\phi}} &= -\sin\phi\ \underline{\hat{x}} + \cos\phi\ \underline{\hat{y}} \end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\underline{r} = R\,\underline{\hat{r}}}$$

<u>שימו לב:</u> $\hat{\underline{r}}$ ו-$\hat{\underline{\phi}}$ משתנים בזמן, אבל $\hat{\underline{x}}$ ו-$\hat{\underline{y}}$ לא.

המהירות הזוויתית היא:

$$\boxed{\omega = \frac{d\phi}{dt}}$$

סימן חיובי מראה שהגוף נע נגד כיוון השעון.

המהירות היא:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = -R\frac{d\phi}{dt}\sin\phi\,\hat{\underline{x}} + R\frac{d\phi}{dt}\cos\phi\,\hat{\underline{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{v} = R\omega\,\hat{\underline{\phi}}}$$

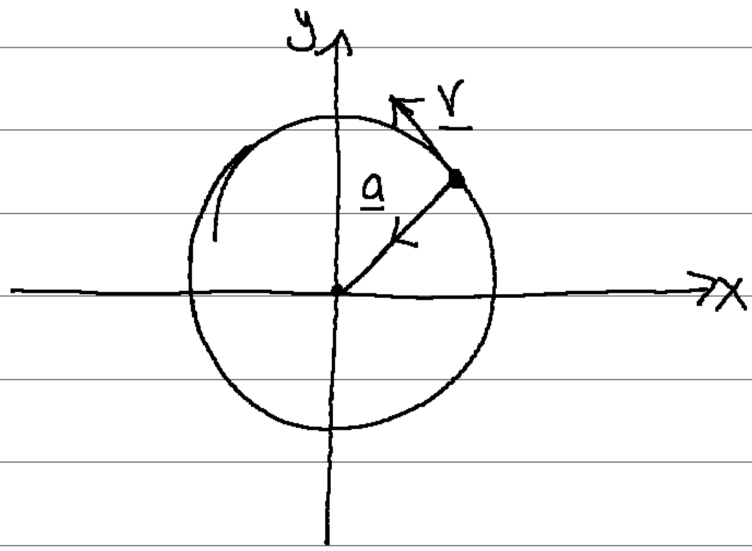
התאוצה היא: $\left(\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = 0 \leftarrow\right.$ מהירות זוויתית קבועה $\left.\right)$

$$\underline{a} = R\omega\left(-\frac{d\phi}{dt}\cos\phi\,\hat{\underline{x}} - \frac{d\phi}{dt}\sin\phi\,\hat{\underline{y}}\right)$$

$$= -\omega^2 R\,\hat{\underline{r}}$$

$$\boxed{\underline{a} = -\omega^2 R \hat{\underline{r}}} \leftarrow \frac{d\omega}{dt} = 0 .$$

אז הכיוון הוא:



אפילו שגודל המהירות לא משתנה, בתנועה מעגלית יש תמיד <u>תאוצה צנטריפטלית</u>.

<u>דוגמא:</u> דיסק קשיח במחשב מסתובב בתדר של

$f = 7200$ rev/min $= 120$ rev/s

מהירות זוויתית: $\omega = 2\pi f = 754\ rad\,s^{-1}$

נקודה במרחק של 3cm מרגישה תאוצה

צנטריפטלית של:

$$|\underline{a}| = \omega^2 R = 0.03 \cdot (754)^2 \simeq 17{,}000\ ms^{-2}.$$

אפשר להשוות לתאוצה של כוח המשיכה $9.8\,ms^{-2}$.

2.1.2. תנועה מעגלית כללית

אם המהירות הזוויתית לא קבועה, אז יש תאוצה זוויתית:

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

התאוצה הזוויתית גורמת לשינוי התאוצה:

$$\underline{V} = R\omega\,\hat{\underline{\phi}}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = -\omega^2 R\,\hat{\underline{r}} + R\alpha\,\hat{\underline{\phi}}$$

תאוצה צנטריפטלית a_n

תאוצה משיקית $\underline{a}_t$

$$\underline{r} = R\,\hat{\underline{r}}$$

$$\underline{r} = R\cos\phi\,\hat{\underline{x}} + R\sin\phi\,\hat{\underline{y}}$$

$$\underline{v} = \omega R\,\hat{\underline{\phi}}$$

$$\underline{v} = -\omega R\sin\phi\,\hat{\underline{x}} + \omega R\cos\phi\,\hat{\underline{y}}$$

$$\underline{a} = \alpha R\,\hat{\underline{\phi}} - \omega^2 R\,\hat{\underline{r}}$$

תאוצה צנטריפטלית, a_n תאוצה משיקית, $\underline{a}_t$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

תאוצה זוויתית

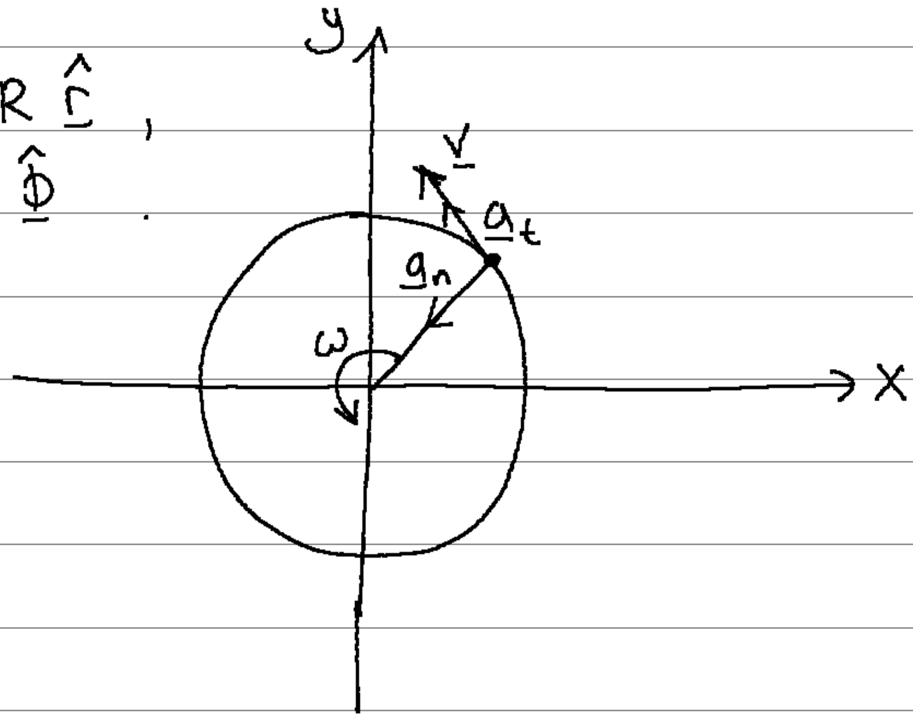
תאוצה זוויתית קבועה:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t-t_0)^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_0(t-t_0)$$

$\underline{a}_n = -\omega^2 R \,\hat{\underline{r}}$,

$\underline{a}_t = \alpha R \,\hat{\underline{\phi}}$.



$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

שאלת דוגמה:

גוף מסתובב במעגל בעל רדיוס R, בתאוצה משיקית קבועה a_t. ברגע $t=0$, הגוף במנוחה.

באיזה רגע הזווית בין וקטור המהירות ווקטור התאוצה שווה ל $\theta = 45^\circ$?

$\underline{V} = \omega R \,\hat{\underline{\phi}}$, $\underline{a} = \alpha R \,\hat{\phi} - \omega^2 R \,\hat{\underline{r}}$

$\underline{a} \cdot \underline{V} = |\underline{a}|\,|\underline{V}| \cos\theta$, $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\, \underline{a}(t_0) \cdot \underline{V}(t_0) = |\underline{a}(t_0)|\,|\underline{V}(t_0)|$

$$\underline{v} \cdot \underline{a} = (\omega R \hat{\underline{\phi}}) \cdot (a_t \hat{\underline{\phi}} - \omega^2 R \hat{\underline{r}})$$

$$= \omega R a_t$$

$$|\underline{v}| = |\omega| R \quad , \quad |\underline{a}| = \left(a_t^2 + (\omega^2 R)^2\right)^{1/2}$$

אז המשוואה:

$$\sqrt{2}\, \omega R a_t = |\omega| R \cdot \left(a_t^2 + (\omega^2 R)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \left(1 + \left(\frac{\omega^2 R}{a_t}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 R = a_t .$$

התאוצה הזוויתית: $a_t = \alpha R$

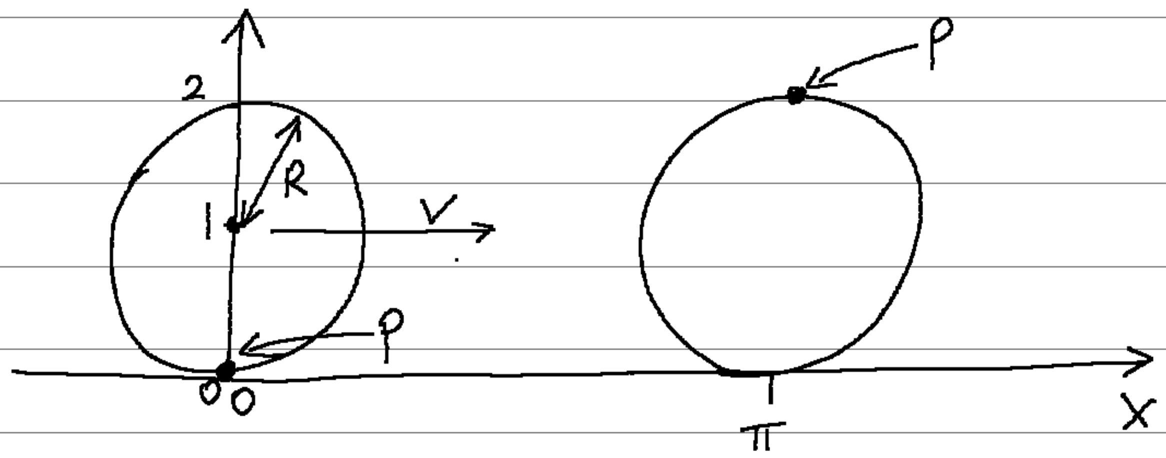
מהירות זוויתית: $\omega(t) = \int_0^t \alpha \, dt' = \alpha t$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a_t t_0}{R}\right)^2 R = a_t \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{R}{a_t}} .$$

שאלת דוגמה 2:

אפשר גם לחבר תנועה מעגלית עם תנועה אחרת:

גלגל ברדיוס R מתגלגל כך שהמרכז שלו נע במהירות קבועה V לאורך ציר X.



א) מהי המהירות הזוויתית בה מסתובב הגלגל?

זמן לעשות סיבוב אחד T: $\Delta X = V \cdot T = 2\pi R$

$\Delta\phi = 2\pi = \omega \cdot T$ $\quad$ $T = \frac{2\pi R}{V}$.

אז $\omega = \frac{V}{R}$.

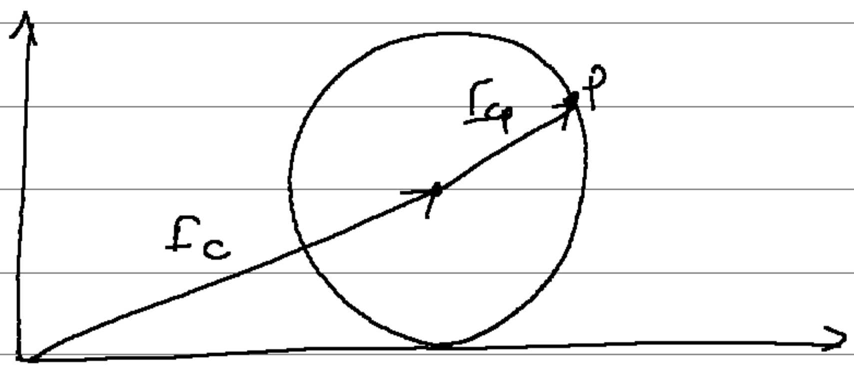
ב) חשבו את וקטור מיקום הנקודה P כפונקציה של זמן.

$$\underline{r}_p(t) = x_p(t)\,\hat{\underline{x}} + y_p(t)\,\hat{\underline{y}}$$

וקטור מיקום מרכז המעגל $\underline{r}_c$

וקטור שמתחיל במרכז המעגל ומסתיים בנקודה P : $\underline{r}_{cp}$

אז, $\underline{r}_p = \underline{r}_c + \underline{r}_{cp}$.



$$\underline{r}_c = Vt\,\hat{\underline{x}} + R\,\hat{\underline{y}}$$

$$\underline{r}_{cp} = R\cos\phi\,\hat{\underline{x}} + R\sin\phi\,\hat{\underline{y}}$$

$$\phi(t) = -\omega t - \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r}_{cp} = -R\sin(\omega t)\,\hat{\underline{x}} - R\cos(\omega t)\,\hat{\underline{y}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r}_p = \left(Vt - R\sin\left(\frac{Vt}{R}\right)\right)\hat{\underline{x}} + R\left(1-\cos\left(\frac{Vt}{R}\right)\right)\hat{\underline{y}}.$$