בס"ד

מצב מוצק
תרגול 1

פורייה: אם $f(x)$ מחזורית ב- a: $f(x)=f(x+a)$

ניתן לכתוב את $f(x)$ בטור פורייה:

$$f(x)=\sum_{k_n} f(k_n)e^{ik_nx}$$

$$k_n=\frac{2\pi}{a}n$$

$$f(k_n)=\frac{1}{a}\int_{\text{מחזור אחד}} f(x)e^{-ik_nx}$$

(1) זהויות:

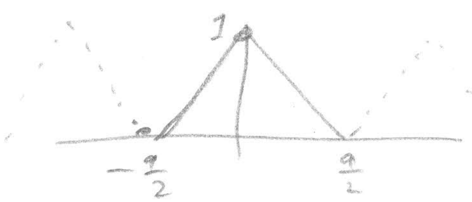
(א) מצא ביטוי ל- $g(x)=e^{ik_0x}f(x)$ במונחי $f(k)$

(ב) מצא ביטוי ל- $\delta(x-x_0)$ כסכום של $\sum_{k_n} A(x,x_0,k_n)$

(2) כיצד נראה הטרנספורם עבור $a\to\infty$?
כיצד נראית ה- δ מהסעיף הקודם?

(3) מצא את הטרנספורם של $e^{-(\frac{x}{\sigma})^2}$ כאשר $\sigma \ll a$.

(4) מה הטרנספורם של המשולש הבא:



ווו

$g(x)$ מחזורית
$\Downarrow$

$$g(x) = e^{ik_0x} f(x) \qquad k_0 = \frac{2\pi}{a} l$$

1 (k)

$$g(k) = \frac{1}{a}\int e^{ik_0x} f(x) e^{-ikx} = \frac{1}{a}\int e^{-i(k-k_0)x} f(x) = f(k-k_0)$$

$$f(x_0) = \sum_k f(k) e^{ikx_0} = \sum_k \frac{1}{a}\int f(x) e^{-ikx} e^{ikx_0} dx = \int \left(\frac{1}{a}\sum_k e^{-ik(x-x_0)}\right) f(x)$$ (3)

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{a}\sum_k e^{-ik(x-x_0)} \Leftarrow \qquad = f(x)$$

(2) טרנספורם עבור $a\to\infty$: יותר נוח להגדיר את $f(k)$ מחדש

$a f(k) \to f(k)$, נקבל:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{a}\sum_k f(k) e^{ikx}$$

$$(2) \quad f(k) = \int_{-a/2}^{a/2} f(x) e^{-ikx}$$

נגדיר $\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{a}$, נכפול ונחלק (1) פי Δk

וניקח $a\to\infty$. נקבל:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{a\Delta k}\sum_k f(k) e^{ikx} \Delta k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}$$

$$(2) \quad f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}$$

$$f(k)=\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}} e^{\ldots} e \qquad dx$$

(3) הטרנספורם:

$$\rightarrow \left(\frac{a}{\sigma}\right)\gg 1 \quad \approx \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2-ikx}dx = \frac{1}{a}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\sigma}{\sigma}\, e^{-\left(\frac{x}{\sigma}+\frac{ik\sigma}{2}\right)^2}}_{\sqrt{\pi}\,\sigma} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}}$$

$$=\frac{\sigma}{a}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$k_n=\frac{2\pi}{a}n \qquad f(k_n)=\frac{1}{a}\int f(x)e^{-ik_nx}$$

$n=-\infty,\ldots -1,0,1,\ldots\infty$

(4) הטרנספורם

מאחר ו $f(x)$ זוגית, נקבל רק קוסינוסים.

(הוא גם $f(k)=f(-k)$).

נקבל:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{a}+1, & x<0\\ -\frac{2x}{a}+1, & x>0\end{cases}$$

ה-1 תורם רק עבור $k_n=0$, אך עבור $k_n\neq 0$ נקבל:

$$f(k_n)\overset{k_n\neq 0}{=}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{0}\frac{2x}{a}e^{-ik_nx}dx+\frac{1}{a}\int_{0}^{a/2}-\frac{2x}{a}e^{-ik_nx}$$

באינטגרל הראשון נשנה $x\to -x$, ונקבל:

$$=-\frac{2}{a^2}\int_0^{a/2}x\cdot 2\cos(k_nx) = -\frac{4}{a^2}\left[\frac{\cos(k_nx)}{k_n^2}+\frac{x\sin(k_nx)}{k_n}\right]_0^{a/2} \qquad k_n=\frac{2\pi}{a}n$$

$$=-\frac{4}{a^2}\left[\cos(\pi n)\cdot\frac{a^2}{4\pi^2n^2}+0-\frac{a^2}{4\pi^2n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi^2n^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

בס״ד

ו״ע של מטריצה

אופרטור - A - מטריצה (לא בהכרח הרמיטית).

$AV_i = \lambda_i V_i \leftarrow \lambda_i, V_i$ ו״ע ימניים

דיראק: $A|i\rangle = \lambda_i|i\rangle$

ניתן גם להגדיר ו״ע שמאליים: $\tilde{V}_i$: $A^+\tilde{V}_i = \lambda^*\tilde{V}_i \leftrightarrow \tilde{V}_i^+A = \lambda_i\tilde{V}_i^+$

או דיראק: $A^+|\tilde{i}\rangle = \lambda^*|\tilde{i}\rangle \leftrightarrow \langle\tilde{i}|A = \lambda_i\langle\tilde{i}|$

אם $\lambda_i \neq \lambda_j$ אז $\tilde{V}_i, V_j$ אורתוגונליים:

$$\lambda_i(\tilde{V}_i, V_j) = (\tilde{V}_i, AV_j) = \lambda_j(\tilde{V}_i, V_j)$$

או $\tilde{V}_i^+AV_j$ או $\langle\tilde{i}|A|j\rangle$

אם דואגים לנרמל את הוקטורים כך ש: $\langle\tilde{i}|i\rangle = 1$,

אז ניתן לפרק את A: $A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle\tilde{i}|$

$$\sum_i \lambda_i V_i \tilde{V}_i^+$$

בקורס נזכור הרבה מהפכים הרגיל ימני ״הופכי״ ← שמאלי:

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

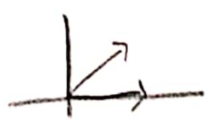
נמצא ו״ע ימניים, שמאליים וע״ע. נפרק את A באמצעותם.

ניתן לראות שו״ע ימניים הם $V_1=(1,1)$ ו- $V_2=(1,0)$ עם ע״ע $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ 2 ו-1.

לכן ו״ע שמאליים יהיו:

$\tilde{V}_1 = (0,1)$

$\tilde{V}_2 = (1,-1)$



נרמול: $\tilde{V}_1^+V_1 = 1$, $\tilde{V}_2^+V_2 = 1$, לכן:

$$A = 2V_1\tilde{V}_1^+ + 1V_2\tilde{V}_2^+$$