פיסיקה של מצב מוצק – תרגיל בית מס' 7 – פתרון

שאלה 1

נתון גביש חד אטומי (אטום אחד בכל תא יחידה) תלת מימדי בעל נפח V.
ידוע כי כל אופני התנודה של הסריג מקיימים $\omega = v_s\left|\vec{k}\right|$, כאשר v_s היא מהירות הקול בסריג.

א. מהי צורת המשטח במרחב $\vec{k}$ עליו לכל ה $\vec{k}$-ים אותה תדירות ω_0?

ב. מהו ה"נפח" במרחב $\vec{k}$ הכלוא בתוך משטח זה (כפונקציה של ω_0)?

ג. מהו מספר אופני התנודה $N(\omega_0)$ להם תדירויות הקטנות מהתדירות ω_0 (התחשבו במספר אופני התנודה לכל $\vec{k}$)?

ד. מגדירים את צפיפות אופני התנודה ליחידת תדר ליחידת נפח: $g(\omega) = \frac{1}{V}\frac{dN(\omega)}{d\omega}$.
מצאו את $g(\omega)$ למקרה הנדון.

פתרון:

א. המשוואה המתארת את המשטח: $\omega_0 = v_s\left|\vec{k}\right| \rightarrow \left(\frac{\omega_0}{v_s}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.
זו משוואה של מעטפת כדור בעל רדיוס $\frac{\omega_0}{v_s}$.

ב. הנפח הוא נפח הכדור: $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega_0}{v_s}\right)^3$

ג. מספר אופני התנודה הוא מספר ה $\vec{k}$-ים שבתוך הכדור, כפול 3 (זה מספר אופני התנודה לכל $\vec{k}$ בגביש חד אטומי תלת מימדי): $N(\omega_0) = 3\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega_0}{v_s}\right)^3 \Big/ \frac{(2\pi)^3}{V} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{\omega_0}{v_s}\right)^3$

ד. לפי ההגדרה: $g(\omega) = \frac{1}{V}\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 v_s^{\,3}}$

שאלה 2

א. נתונה מערכת תלת מימדית בנפח V בה יחס הדיספרסיה מבוטא ע"י $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 \left|\vec{k}\right|^2}{2m}$. נתון כי לכל $\vec{k}$ קיימים שני "אופני תנודה". מצאו את צפיפות אופני התנודה ליחידת תדר ליחידת נפח למערכת זו.

ב. נתונה מערכת d מימדית, בה מתקיים $\omega \propto \left|\vec{k}\right|^r$ (r הוא מספר ממשי כלשהו). הראו כי צפיפות אופני התנודה ליחידת תדר ליחידת נפח d מימדי במערכת זו פרופורציונית ל ω^q, ורשמו את q במונחים של r ושל d.

פתרון:

א. מן הנתון: $\left|\vec{k}\right| = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$. כלומר, מספר אופני התנודה שעד תדירות ω הוא נפח הכדור התלת מימדי ברדיוס $\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$, מחולק בנפח שתופס $\vec{k}$ אחד במרחב ההופכי, מחולק בנפח כל המערכת, כפול 2, כי יש שני אופני תנודה לכל $\vec{k}$:

$$n(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3 / V} = \frac{2\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2\hbar^{\frac{3}{2}}}\omega^{\frac{3}{2}}.$$

לקבלת הצפיפות, נגזור לפי ω: $g(\omega) = \frac{\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{\pi^2\hbar^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\omega}$.

ב. נתון: $\omega \propto \left|\vec{k}\right|^r$. לכן $\omega^{\frac{1}{r}} \propto \left|\vec{k}\right|$. נתון כי המערכת היא d מימדית, לכן זו משוואה של כדור d מימדי ברדיוס הפרופורציוני ל $\omega^{\frac{1}{r}}$. מספר אופני התנודה שעד תדירות ω פרופורציוני לנפח במרחב ההופכי של הכדור ה d מימדי הזה, כלומר, פרופורציוני ל $\omega^{\frac{d}{r}}$. צפיפות אופני התנודה היא הנגזרת לפי ω של מספר אופני התנודה שעד תדירות ω, ולכן היא פרופורציונית ל $\omega^{\frac{d}{r}-1}$. לכן, $q = \frac{d}{r} - 1$.

שאלה 3

נתון גביש חד אטומי דו מימדי בו יחס הדיספרסיה לתנודות במישור הגביש לתדירויות קטנות הוא $\omega\left(\vec{k}\right)=C\left(\left|k_x\right|+\left|k_y\right|\right)$. שני ענפי הדיספרסיה מנוונים. מצאו את צפיפות אופני התנודה ליחידת תדר ליחידת שטח לגביש זה (בשביל תדירויות קטנות). התחשבו בניוון.

פתרון:

הקו שווה התדירות בתדירות ω הוא מעויין בעל צלע באורך $\sqrt{2}\frac{\omega}{C}$, כך שהשטח שבתוכו הוא $S\left(\omega\right)=2\frac{\omega^2}{C^2}$. כלומר, מספר אופני התנודה ליחידת שטח שעד תדירות ω הוא: $n\left(\omega\right)=2\cdot\frac{1}{A}\frac{S\left(\omega\right)}{\left(2\pi\right)^2/A}=\frac{4\omega^2}{\left(2\pi\right)^2C^2}=\frac{\omega^2}{\pi^2C^2}$. הכפלנו ב 2 מפני שלכל $\vec{k}$ יש שני אופני תנודה מנוונים באותה תדירות.

צפיפות אופני התנודה היא הנגזרת של מספר אופני התנודה לפי התדירות:

$$g\left(\omega\right)=\frac{dn\left(\omega\right)}{d\omega}=\frac{2\omega}{\pi^2C^2}.$$