קירוב דבאי

נתונה מערכת d - מימדית בה יחס הנפיצה נתון ע"י $\omega = C|\vec{k}|^r$, באשר $r \geq 1$ ו-C הוא מספר חיובי.

1. מצאו את צפיפות אופני התנודה ליחידת תדר ליחידת נפח.
2. חשבו את החום הסגולי בטמפרטורה נמוכה וגבוהה (בקירוב דבאיי).

קירובי דבאיי ואיינשטיין

נתון גביש המורכב משריג דו מימדי עם בסיס של שלושה אטומים. האטומים יכולים לנוע רק במקביל למישור הגביש. הענף האקוסטי (המנוון) של יחס הדיספרסיה עבור k קטנים נתון ע"י $\omega(k) = C\sqrt{|k|}$, באשר C קבוע חיובי. התדירות הממוצעת של הענפים האופטיים היא ω_E. מספר תאי היחידה הפרימיטיביים בגביש הוא N, השטח הכולל של הגביש הוא A.

1. כמה מודים מכל סוג יש לכל k?
2. מהי טמפרטורת דבאיי של הגביש?
3. חשבו את צפיפות המצבים של הפונונים האקוסטיים.
4. קבלו ביטוי לתרומת הפונונים האקוסטיים לקיבול החום הסגולי של הגביש כפונקציה של הטמפרטורה, בקירוב דבאיי.
5. קבלו ביטוי לתרומת הפונונים האופטיים לקיבול החום הסגולי של הגביש כפונקציה של הטמפרטורה, בקירוב אינשטיין.
6. קבלו ביטוי לקיבול החום הסגולי של כל הפונונים בגבול של טמפרטורה נמוכה ובגבול ההפוך.

זרם חשמלי מושרה

מהו הזרם החשמלי המושרה במתכת ע"י שדה חשמלי $\vec{E}(t)$ בתדירות ω בנוכחות שדה מגנטי קבוע $\vec{H}=H\hat{z}$?

1. מצאו את טנסור ההתנגדות החשמלית ואת טנסור המוליכות החשמלית.
2. מצאו טנסור המוליכות כאשר $\omega=0$.
3. מצאו את טנסור המוליכות החשמלית בגבול של תדירות גבוהה ($\omega\tau \gg 1$). מה קורה בגבול זה אם $\omega\approx\omega_c$ ($\omega_c=\frac{eH}{mc}$).

הנח כי השדה המגנטי של הגל זניח לעומת השדה החשמלי שלו.

גלי הליקון

מתכת נמצאת בשדה מגנטי אחיד H בכיוון ציר z, ובשדה חשמלי מתנדנד $Ee^{-i\omega t}$ הניצב לכיוון השדה המגנטי.

1. אם השדה החשמלי מקוטב מעגלית $E_y=\pm iE_x$, הראה כי
$$j_x=\left(\frac{\sigma_0}{1-i(\omega\mp\omega_c)\tau}\right)E_x \qquad j_y=\pm i j_x \qquad j_z=0$$
2. הראה כי בצירוף למשוואות של הסעיף הקודם, למשוואות מקסוול קיים הפתרון
$$E_x=E_0e^{i(kz-\omega t)},\quad E_y=\pm iE_x,\quad E_z=0$$
בתנאי שקיים $k^2c^2=\epsilon\omega^2$, $\epsilon(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega}\left(\frac{1}{\omega\mp\omega_c+i/\tau}\right)$, באשר ω_c תדירות הציקלוטרון, $\omega_p^2=\frac{4\pi ne^2}{m}$ תדירות הפלסמה.
3. הראו שכאשר $\omega\ll\omega_c$ ו- $\omega\gg\omega_p$ יחס הדיספרסיה עבור תדר נמוך הוא $\omega=\omega_c\left(\frac{k^2c^2}{\omega_p^2}\right)$.

גל תדר נמוך זה ידוע כהליקון.

מערכת d ממדית

(1) $\omega = c\|\vec{k}\|^{r}$

מספר המצבים עם תדירות ω הוא נפח הכדור ה-d ממדי עם רדיוס $k=\|\vec{k}\| = \left(\frac{\omega}{c}\right)^{1/r}$, חלקי מרווח המצבים ($\Delta k$).

$$N = \frac{1}{\Delta k}\Omega_d(k(\omega)) \quad , \quad \Omega_d(k) = \frac{S_d k^d}{d}$$

[S_d - שטח כדור יחידה d-ממדי; $\Omega_d(1)$ - נפח כדור יחידה; d - ממד]

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

$S_1 = 2,\ S_2 = 2\pi,\ S_3 = 4\pi \ \ldots$

$$g(\omega) = \frac{1}{V}\frac{dN}{d\omega} = \frac{\cancel{d}}{(2\pi)^d}\frac{S_d k^{d-1}}{\cancel{d}}\frac{dk}{d\omega}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} S_d \left(\frac{\omega}{c}\right)^{\frac{d}{r}-1}\cdot\frac{1}{c}$$

$$= \alpha\,\omega^{p} \quad , \quad p = \frac{d}{r}-1 \ , \quad \alpha = \frac{S_d}{(2\pi)^d c^{d/r}}$$

$$n = \frac{N(\omega_D)}{V} = \frac{\alpha\,\omega_D^{p+1}}{p+1} \Rightarrow \alpha\,\omega_D^{d/r} = n$$

(2) תדירות דבאי:

$$\left(\frac{(2\pi)^d}{V_{unit}}\cdot\frac{d}{S_d}\right)^{r/d}\cdot c = \omega_D \quad , \quad x_D = \omega_D/T$$

$$C_v = \alpha\cdot T^{d/r}\int_0^{x_D}\frac{x^{\frac{d}{r}+1}e^{x}}{(e^{x}-1)^2} \underset{(x_D\to\infty)}{=} \frac{S_d}{(2\pi)^d c^{d/r}}\,T^{d/r}\cdot\left(\frac{d}{r}+1\right)!\,\zeta\left(\frac{d}{r}+1\right)$$

אם זה מזכיר לנו
כל הקירוב הלוקלי
צריך להרכיב ל-d
[לכן מובנ נקודת אפס
אקוסטי גופן]

$$\frac{\alpha\,\omega_D^{d/r}}{(d/r)} = n$$

(כדי לקבל
את Debye-פונקציה
צריך להרכיב)
ב-d: פי
התנאים לגבי
אינטגרל ...

קירוב דבאי - איינשטיין (או-מיקס).

$$\omega(k) = c\sqrt{\|k\|}$$

1) בסה"כ $2\cdot 3=6$ ענפים: שניים אקוסטיים, 4 אופטיים

2) תמ"פ דבאי נקבעת לפי - $\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_b}$ כך שהוקטור כמרחק - k כולל את מספר האטומים הנמצאים באיזור ברילואן הראשון.

2D: $\omega_D = c\sqrt{k_D}$, $N = \frac{\pi k_D^2}{\Delta k}$

(3)-(4): כמו שאלה קודמת רק $d=2$, $r=1/2$. לשים לב שיש פה שני ענפים אקוסטיים מנוונים אז יש להתחשב בשניהם. [לשים לב ל-Θ_D, לא אבל תמיד nk_b]. את שאר התשובה ב T גבוה נקבל מהמודים האופטיים דרך קירוב איינשטיין (3 כפול $C_v \sim 6nk_b$ ב T גבוה).

(5) לפי איינשטיין נקבל מוד תרמה ~ $C_1 = k_b \frac{(\hbar\omega_E/k_bT)^2 e^{\hbar\omega_E/k_bT}}{(e^{\hbar\omega_E/k_bT}-1)^2}$

והתרומה הכוללת: $C_v = C_1\cdot 4n$

(6) הקירוב הרגיל... איינשטיין לא תורם בט"פ נמוך. שניהם תורמים קבוע ($4nk_b$) בט"פ גבוה.

דבאי נותן ~ $T^{2/(1/2)} = T^4$

Ex_04_005

מש' התנועה:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{mc}\times\vec{H}\right) - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

$$\vec{H} = H\hat{z} \quad , \quad \vec{E}(t) = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} \quad , \quad \vec{E}(t) = \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$$

ברכיבים:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = -e\left(E_x(t) + \dfrac{p_y(t)H}{m}\right) - \dfrac{p_x(t)}{\tau} \\ \dfrac{dp_y}{dt} = -e\left(E_y(t) - \dfrac{p_x(t)H}{mc}\right) - \dfrac{p_y(t)}{\tau} \\ \dfrac{dp_z}{dt} = -eE_z(t) - \dfrac{p_z(t)}{\tau} \end{cases}$$

נציב $\vec{p}(t) = \vec{p}(\omega)e^{-i\omega t}$ ונצמצם את $e^{-i\omega t}$:

$$\begin{cases} -i\omega p_x(\omega) = -e\left(E_x(\omega) + \dfrac{p_y(\omega)H}{mc}\right) - \dfrac{p_x(\omega)}{\tau} \\ -i\omega p_y(\omega) = -e\left(E_y(\omega) - \dfrac{p_x(\omega)H}{mc}\right) - \dfrac{p_y(\omega)}{\tau} \\ -i\omega p_z(\omega) = -eE_z(\omega) - \dfrac{p_z(\omega)}{\tau} \end{cases}$$

הגדרת הזרם:

$$\vec{j} = -\frac{en}{m}\vec{p} \quad , \quad \vec{p} = -\frac{m}{en}\vec{j}$$

$$\begin{cases} \dfrac{i\omega m}{en} j_x(\omega) = -e\left(E_x(\omega) - \dfrac{j_y(\omega)H}{mc}\right) + \dfrac{m j_x(\omega)}{en\tau} \\ \dfrac{i\omega m}{en} j_y(\omega) = -e\left(E_y(\omega) + \dfrac{j_x(\omega)H}{mc}\right) + \dfrac{m j_y(\omega)}{en\tau} \\ \dfrac{i\omega m}{en} j_z(\omega) = -eE_z(\omega) + \dfrac{m j_z(\omega)}{en\tau} \end{cases}$$

נגדיר

$$\omega_c = \frac{eH}{mc} \quad , \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\omega) = \hat{\rho}\, \vec{j}(\omega)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} 1 - i\omega\tau & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 - i\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i\omega\tau \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1 - i\omega\tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} & \frac{-\omega_c\tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_c\tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} & \frac{1 - i\omega\tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - i\omega\tau} \end{pmatrix}$$

נציב $\omega = 0$:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau)^2} & -\frac{\omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} & \frac{1}{1 + (\omega_c\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תדירות גבוהה $\omega\tau \gg 1$

$$\hat{\sigma} \simeq \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\tau(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{\omega_c}{\tau(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{-\omega_c}{\tau(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega}{\tau(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\omega\tau} \end{pmatrix}$$

עבור $\omega \approx \omega_c$ נוצרים במישור הניצב לשדה המגנטי זרמים מאוד חזקים, גם אם עוצמת השדה החשמלי במישור זה אינה גבוהה. המע' נכנסת לתהודה, ובה יש העברה יעילה של אנרגיה א"מ לאנרגיה קינטית של אלקטרונים.

Ex_05_002

$$\vec{E} = \left(E(\omega) e^{-i\omega t}, s i E(\omega) e^{-i\omega t}, 0 \right) ; \quad S = \pm 1 \qquad (1)$$

$$\vec{H} = (0, 0, H_z)$$

מש' התנועה:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{mc} \times \vec{H} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

$$\vec{p} = -\frac{m}{en} \vec{j}$$

נציב $\vec{p}(t) = \vec{p}(\omega) e^{-i\omega t}$

$$-\frac{m}{en}(-i\omega)\vec{j} = -e\left(\vec{E} - \frac{1}{ecn} \vec{j} \times \vec{H} \right) + \frac{m}{en\tau}\vec{j}$$

$$\begin{cases} \frac{m}{en}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) j_x = -eE_x + \frac{1}{cn} j_y H \\ \frac{m}{en}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) j_y = -eisE_x - \frac{1}{cn} j_x H \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{m}{e^2 n}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) j_x + \frac{1}{cen} j_y H$$

$$\Rightarrow \frac{m}{en}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) j_y = +\cancel{e} i s \frac{m}{e^2 n}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) j_x - \frac{\cancel{e} i s}{c \cancel{e} n} j_y H - \frac{1}{cn} j_x H$$

$$\frac{m}{en}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right)(j_y - i s j_x) = -\frac{H}{cn}(j_x + i s j_y)$$

$j_y = \pm i j_x \quad \Leftarrow \quad S = \pm 1$ כיוון ש

$$E_x = -\frac{m}{e^2 n}\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) j_x \pm \frac{iH}{cen} j_x = \qquad \Leftarrow$$

$$= \left(-i\omega \frac{m}{e^2 n \tau}\tau + \frac{m}{e^2 n \tau} \pm i \frac{eH}{mc} \frac{m}{e^2 n \tau} \tau \right) j_x =$$

$$= \left(-i\omega \frac{\tau}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \pm \omega_c \frac{\tau}{\sigma_0} \right) j_x$$

$$\omega_c = \frac{eH}{mc} \qquad \sigma_0 = \frac{e^2 n \tau}{m}$$

$$j_x = \frac{\sigma_0}{1 - i(\omega \mp \omega_c)\tau} E_x$$

(Ex_05_005) ניתן לקבל את גלים מעין את מקוטב (2)

$$-\nabla^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}$$

$$E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \qquad E_y = \pm i E_x \, , \; E_z = 0$$

$$\Rightarrow k^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} = 1 + i \frac{4\pi}{\omega} \frac{\sigma_0}{1 - i(\omega \mp \omega_c)\tau} =$$

$$= 1 - \frac{4\pi}{\omega} \frac{\sigma_0}{\tau} \frac{1}{(\omega \mp \omega_c) + i/\tau} \quad ; \quad \frac{\sigma_0}{\tau} = \frac{e^2 n}{m}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{1}{\omega \mp \omega_c + i/\tau} \quad , \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

$$\varepsilon \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 \mp \frac{\omega_c}{\omega} + \frac{i}{\omega\tau}} \simeq \quad \Leftarrow \omega \ll \omega_c \qquad \omega \gg \omega_p \, , \; \omega \ll \omega_c \quad (3)$$

$$\simeq 1 \pm \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega_c} = 1 \pm \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c} \simeq \pm \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}$$

$$k^2 c^2 = \varepsilon \omega^2 \simeq \omega \frac{\omega_p^2}{\omega_c}$$

$$\omega \simeq \left(\frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \right) \omega_c$$