וקטורים

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ב, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

סקלרים, וקטורים וטנזורים אחרים

ישנם גדלים פיזיקליים שניתן לתאר על ידי מספר אחד (שאינו תלוי בכיוון מערכת הצירים), כגון מסה של גוף, טמפרטורה בנקודה מסוימת במרחב, מרחק בין שתי נקודות, מספר הסטודנטים באולם. גדלים כאלה נקראים **סקלרים**.

לעומתם, ישנם אובייקטים פיזיקליים שיש להם גודל וכיוון (שניתן לתאר גם באמצעות שלושה רכיבים במערכת צירים נתונה), כגון העתק (שינוי במיקום), מהירות, כוח, תנע זוויתי, שדה חשמלי בנקודה מסוימת במרחב. אובייקטים כאלה נקראים **וקטורים**. נסמן וקטורים על ידי חץ מעל האות, לדוגמה $\vec{A}$.

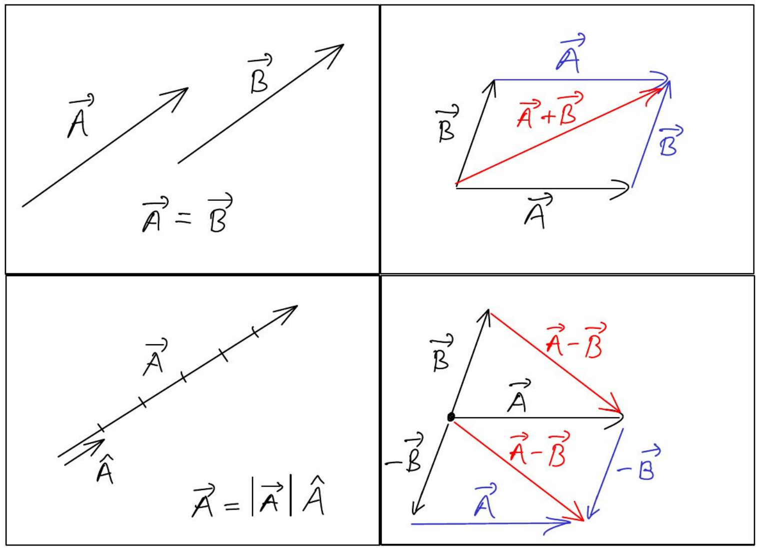
ביתר כלליות, ניתן לדבר על **טנזורים**, כאשר סקלר הוא טנזור מדרגה 0, וקטור הוא טנזור מדרגה 1, וישנם גם טנזורים מדרגות גבוהות יותר. דוגמה לטנזור מדרגה 2, שניתן לתאר באמצעות מטריצה בגודל 3×3, הוא טנזור האינרציה, המקשר בין וקטור המהירות הזוויתית של גוף קשיח לבין וקטור התנע הזוויתי שלו.

הסיבה לכך שהאובייקטים המופיעים באופן טבעי בחוקי הפיזיקה הם דווקא הסקלרים, הווקטורים והטנזורים האחרים קשורה לסימטריית הסיבוב, כפי שנלמד בהמשך הקורס.

וקטורים: תכונות ופעולות

- נציג וקטור במרחב כחץ, עם גודל וכיוון. הזזה של וקטור אינה משנה את הווקטור – אם יש לשני וקטורים אורך זהה וכיוון זהה, הם שווים, נסמן $\vec{A}=\vec{B}$.
- נסמן את **הגודל של וקטור** $\vec{A}$ ב־$|\vec{A}|$.
- ניתן להכפיל וקטור $\vec{A}$ בסקלר b: $\vec{C}=b\vec{A}$. גודל וקטור התוצאה מקיים: $|\vec{C}|=|b||\vec{A}|$. כיוונו של $\vec{C}$ זהה לכיוונו של $\vec{A}$ כאשר b חיובי, והפוך אם b שלילי.
- וקטור שגודלו 1 ייקרא **וקטור יחידה**, ונסמנו $\hat{A}$. ניתן להפוך וקטור לווקטור יחידה בכיוונו על ידי חלוקה בגודל שלו: $\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$.
- **חיבור וקטורים** – לפי חוק המקבילית: אם $\vec{A}$ ו־$\vec{B}$ מוזזים כך ש־$\vec{B}$ יתחיל היכן ש־$\vec{A}$ מסתיים, אז $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ הוא הווקטור המחבר את תחילת $\vec{A}$ לסוף $\vec{B}$. קל לראות שהחיבור חילופי.

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.



איור 1: פעולות עם וקטורים: חיבור, כפל בסקלר, חיסור.

- **וקטור האפס** הוא הווקטור המקיים $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$.
- **הווקטור הנגדי** ל-$\vec{A}$ (נסמנו $-\vec{A}$) הוא הווקטור המקיים $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$.
- **חיסור וקטורים** – חיבור עם הווקטור הנגדי: $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$.
- **מכפלה סקלרית** של וקטורים היא מכפלה שתוצאתה סקלר (מספר שאינו תלוי בכיוון מערכת הצירים):

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \tag{1}$$

כאשר θ היא הזווית בין $\vec{A}$ ל-$\vec{B}$. שימו לב שהמכפלה הסקלרית היא חילופית:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \tag{2}$$

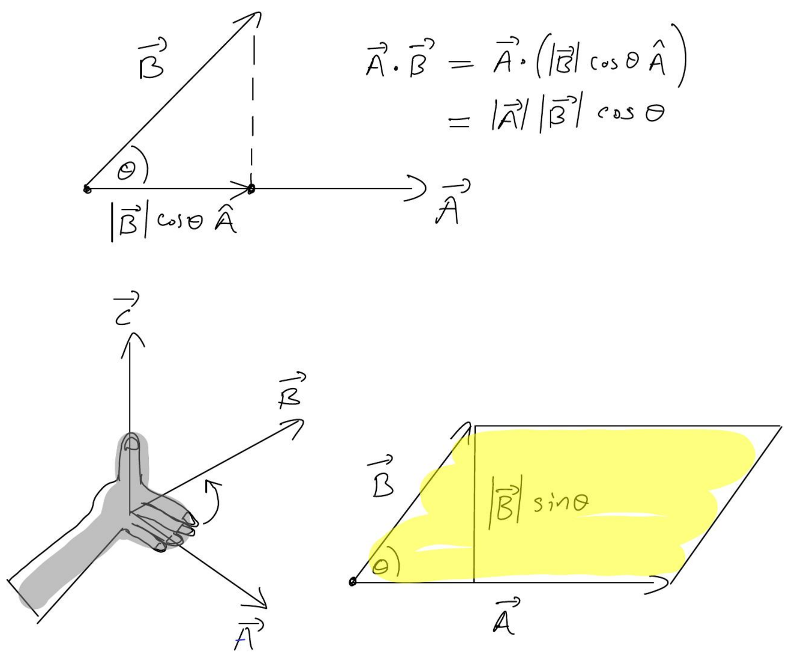
כמו כן מתקיים שאם"ם $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ הווקטורים ניצבים זה לזה (או שאחד מהם הוא $\vec{0}$).

עבור וקטור $\vec{A}$ מתקיים $\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2$.

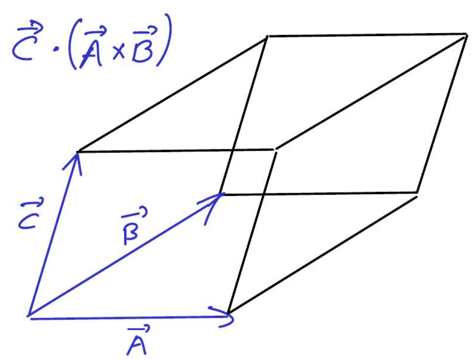
כאשר $\vec{A}$ הוא וקטור יחידה, המכפלה הסקלרית מחזירה את **ההיטל** של וקטור $\vec{B}$ על וקטור $\vec{A}$.

- **מכפלה וקטורית** של וקטורים היא מכפלה שתוצאתה וקטור, $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$. גודל הווקטור המתקבל הוא

$$|\vec{C}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \tag{3}$$



איור 2: **למעלה**: מכפלה סקלרית. המשמעות הגאומטרית היא מכפלת הגדלים לאחר לקיחת היטל. **למטה**: מכפלה וקטורית. המשמעות הגאומטרית של גודל תוצאת המכפלה היא שטח המקבילית הנפרשת על ידי שני הווקטורים. כיוון התוצאה מאונך לשני הווקטורים ונקבע לפי כלל יד ימין.



איור 3: מכפלה משולשת – נפח מקבילון.

כאשר θ היא הזווית (הקטנה מ־180°) בין $\vec{A}$ ל־$\vec{B}$. הווקטור $\vec{C}$ מאונך ל־$\vec{A}$ ול־$\vec{B}$ וכיוונו נקבע ע"י הפעלת **כלל יד ימין** על הסיבוב מ־$\vec{A}$ ל־$\vec{B}$. בהתאם לכך, המכפלה הווקטורית היא אנטי חילופית:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{4}$$

המכפלה הווקטורית מתאפסת (כלומר, מתקבל וקטור האפס) אם"ם הווקטורים מקבילים זה לזה (או שאחד מהם הוא $\vec{0}$).

המשמעות הגאומטרית של גודל המכפלה הווקטורית: שטח המקבילית שהווקטורים מגדירים שתיים מצלעותיה (ראו איור 2).

המכפלה הווקטורית מקיימת:

$$(b\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (b\vec{B}) = b\,(\vec{A} \times \vec{B}) \tag{5}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \tag{6}$$

בנוסף מתקיימת הזהות הבאה המשלבת את שני סוגי המכפלות:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \tag{7}$$

ניתן להבין את נכונותה באופן גאומטרי: שלושת הביטויים (ליתר דיוק, ערכיהם המוחלטים) הם דרכים שונות לחשב את נפח המקבילון הנפרש על ידי שלושת הווקטורים (איור 3). ניתן גם להוכיח את הזהויות הנ"ל בקלות יחסית בשפה של רכיבים, שנדון בה כעת.

רכיבים של וקטורים

נבחר מערכת של צירים מאונכים. נוח להגדיר את וקטורי היחידה הבאים, **וקטורי הבסיס**,[1]

$$\hat{x} = (1,0,0) \tag{8}$$

$$\hat{y} = (0,1,0) \tag{9}$$

$$\hat{z} = (0,0,1) \tag{10}$$

כמקובל, אנחנו משתמשים ב**מערכת צירים ימנית** כך שכיוון ציר z נקבע ע"י כלל יד ימין לפי $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. וקטורי הבסיס מקיימים

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1\,, \qquad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \tag{11}$$

ניתן לפרוש כל וקטור באמצעות וקטורי הבסיס:

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z} \tag{12}$$

כאשר המספרים הממשיים A_i הם ה**רכיבים** של הווקטור. ערכיהם מתארים את ההיטלים של הווקטור על שלושת הצירים:

$$\vec{A} \cdot \hat{x} = A_1\,, \quad \vec{A} \cdot \hat{y} = A_2\,, \quad \vec{A} \cdot \hat{z} = A_3 \tag{13}$$

[1] לפעמים במקום $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ מסמנים את וקטורי הבסיס $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ או $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$.

וקטור האפס הוא $\vec{0} = (0,0,0)$. הווקטור הנגדי ל־$\vec{A}$ הוא $-\vec{A} = (-A_1, -A_2, -A_3)$.
חיבור וקטורים:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1,\ A_2 + B_2,\ A_3 + B_3) \tag{14}$$

הכפלת וקטור בסקלר:

$$b\vec{A} = (bA_1,\ bA_2,\ bA_3) \tag{15}$$

כדי לקבל ביטוי עבור המכפלה הסקלרית, נחשב

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z}) \cdot (B_1\hat{x} + B_2\hat{y} + B_3\hat{z}) \tag{16}$$

ונקבל

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{17}$$

ניתן לראות את ההתאמה עם $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ אם נבחר למשל שציר ה־x הוא בכיוון $\vec{A}$ ואז $A_1 = |\vec{A}|$ (ושאר רכיביו של $\vec{A}$ מתאפסים) ו־$B_1 = |\vec{B}|\cos\theta$.
מקרה פרטי של המכפלה הסקלרית הוא

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \tag{18}$$

ולכן גודל הווקטור נתון ע"י

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{19}$$

דוגמה: נמצא משוואה המתארת מישור המאונך לווקטור נתון $\vec{N}$ והעובר דרך נקודה שמיקומה (ביחס לראשית) נתון ע"י הווקטור $\vec{a}$.

נסמן את מיקומה של נקודה כללית על המישור ב־$\vec{r} = (x,y,z)$ ונדרוש שהווקטור $\vec{r} - \vec{a}$, שכמובן מקביל למישור, יהיה מאונך ל־$\vec{N}$:

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0 \tag{20}$$

מכאן נקבל את המשוואה

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = d \tag{21}$$

או

$$N_x x + N_y y + N_z z = d \tag{22}$$

כאשר $d = \vec{a} \cdot \vec{N}$. לדוגמה, עבור

$$\vec{N} = (4, 5, -2)\,, \quad \vec{a} = (1, 0, 1) \tag{23}$$

נקבל $d = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) = 2$, ומשוואת המישור תהיה

$$4x + 5y - 2z = 2 \tag{24}$$

וקטורי הבסיס מקיימים

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}\,, \qquad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}\,, \qquad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \tag{25}$$

נשים לב ששלוש המשוואות האלה קשורות זו לזו ע"י פרמוטציות ציקליות. (**פרמוטציה ציקלית** מתקבלת מהצירוף xyz על ידי נטילת אחד האיברים מהקצה והעברתו לקצה השני, לדוגמה על ידי נטילת z והעברתו מימין לשמאל מתקבל zxy, וניתן לחזור על התהליך מספר פעמים.) אם מחליפים את סדר הווקטורים במכפלות, מקבלים את אותן התוצאות עם סימן מינוס:

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}\,, \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}\,, \quad \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \tag{26}$$

בעזרת תכונות אלה, נקבל עבור המכפלה הווקטורית

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z}) \times (B_1\hat{x} + B_2\hat{y} + B_3\hat{z}) && (27)\\ &= A_1B_2\hat{z} - A_1B_3\hat{y} - A_2B_1\hat{z} + A_2B_3\hat{x} + A_3B_1\hat{y} - A_3B_2\hat{x} && (28)\\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\,\hat{x} + (A_3B_1 - A_1B_3)\,\hat{y} + (A_1B_2 - A_2B_1)\,\hat{z} && (29) \end{aligned}$$

או

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2,\ A_3B_1 - A_1B_3,\ A_1B_2 - A_2B_1) \tag{30}$$

ניתן לבדוק שאם למשל נבחר את ציר ה־x להיות בכיוונו של $\vec{A}$ ואת ציר ה־y כך ש־$\vec{B}$ יימצא במישור xy, נקבל $A_2 = A_3 = B_3 = 0$, $A_1 = |\vec{A}|$ ו־$B_2 = |\vec{B}|\sin\theta$, מה שנותן

$$\vec{A} \times \vec{B} = (0,\ 0,\ |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta) \tag{31}$$

כלומר וקטור בכיוון $\hat{z}$ שגודלו $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$, כמצופה.

ניתן גם לרשום את המכפלה הווקטורית כדטרמיננטה:[2]

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{32}$$

והמכפלה המשולשת ממשוואה (7) נתונה ע"י

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{33}$$

[2] מי שעדיין לא מכיר את מושג הדטרמיננטה (עליו תלמדו בקורס אלגברה ליניארית), יכול בינתיים להתייחס למשוואה (32) כמעין סימון שמתפרש כמשוואה (29).

אינדקסים

שוויון בין שני וקטורים

$$\vec{A} = \vec{B} \tag{34}$$

שקול לשלוש משוואות המשוות את הרכיבים שלהם:

$$A_1 = B_1 \tag{35}$$
$$A_2 = B_2 \tag{36}$$
$$A_3 = B_3 \tag{37}$$

ניתן לרשום את שלוש המשוואות בצורה קומפקטית כ־

$$A_i = B_i \tag{38}$$

האינדקס i במשוואה (38) הוא **אינדקס חופשי** – אפשר להציב בו כל ערך שנרצה (מתוך $i = 1, 2, 3$) ולקבל משוואה תקפה.

את הפרישה של וקטור לרכיבים נרשום כך:

$$\vec{A} = A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z} = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i \tag{39}$$

כאשר $\hat{e}_i$ מסמנים את וקטורי הבסיס:

$$\hat{e}_1 = \hat{x}\,, \quad \hat{e}_2 = \hat{y}\,, \quad \hat{e}_3 = \hat{z} \tag{40}$$

האינדקס i במשוואה (39) הוא **אינדקס קשור** – יש להציב בו את כל הערכים האפשריים $i = 1, 2, 3$ ולסכום.

את המכפלה הסקלרית ניתן לרשום באופן הבא:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i \tag{41}$$

את המכפלה הווקטורית

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2,\ A_3B_1 - A_1B_3,\ A_1B_2 - A_2B_1) \tag{42}$$

ניתן לרשום באמצעות **סימן לוי־צ'יוויטה** ϵ_{ijk} **(Levi-Civita symbol)** כך:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_jB_k \tag{43}$$

או כך:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_jB_k\hat{e}_i \tag{44}$$

כאשר רכיביו של ϵ_{ijk} נתונים על ידי

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = +1 \tag{45}$$
$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \tag{46}$$

ושאר הרכיבים הם 0. בשלב זה של הלימוד, אנחנו יכולים לחשוב על ϵ_{ijk} בתור משהו שמקודד את נוסחת המכפלה הווקטורית שבמשוואה (42) – אילו מכפלות של רכיבי $\vec{A}$ ו־$\vec{B}$ מופיעות עם פלוס, אילו עם מינוס, ואילו אינן מופיעות כלל, עבור כל רכיב של וקטור התוצאה. בהמשך הקורס (בפרק "סיבובים וטנזורים") נלמד שסימן לוי־צ'יוויטה ϵ_{ijk} הוא אובייקט מיוחד – הוא טנזור מדרגה 3 והוא טנזור אינווריאנטי, כלומר לרכיבים שלו יש אותם ערכים בכל מערכת צירים.

שימושי לשים לב לכך שהערך של ϵ_{ijk} אינו משתנה תחת פרמוטציה ציקלית של האינדקסים:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} \tag{47}$$

והופך סימן תחת החלפת שני אינדקסים (כלומר הוא **אנטיסימטרי**):

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{jik} \\ &= -\epsilon_{ikj} \\ &= -\epsilon_{kji} \end{aligned} \tag{48}$$

האנטיסימטריות גם מבטיחה שכאשר לפחות לשניים מהאינדקסים i, j, k יש אותו ערך, ϵ_{ijk} מחזיר 0. לדוגמה, מהשוויון הראשון במשוואה (48) נובע ש־$\epsilon_{112} = -\epsilon_{112}$, וזה אומר ש־$\epsilon_{112} = 0$.

כדי לרשום את משוואות (38), (41), (43) ו־(44) בצורה יותר קומפקטית, נשים לב שאינדקסים שעליהם מסכמים באמצעות ה־$\sum$ ("האינדקסים הקשורים") תמיד מופיעים פעמיים באותו איבר, בעוד שאינדקסים שלא מסכמים עליהם ("האינדקסים החופשיים") מופיעים פעם אחת. על כן, נגדיר את **הסכם הסכימה של אינשטיין**:

לא רושמים את סימני הסכימה $\sum$ במפורש, אך זוכרים שיש לבצע סכימה על כל אינדקס שמופיע פעמיים באותו איבר.

במסגרת הסכם הסכימה, המשוואות (38), (41), (43) ו־(44) תירשמנה כך:

$$A_i = B_i \tag{49}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \tag{50}$$
$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \tag{51}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_j B_k \, \hat{e}_i \tag{52}$$

שימו לב שבעוד שבמשוואה (51) האינדקס i הוא אינדקס חופשי והסכימה באגף ימין היא על j ו־k, במשוואה (51) הסכימה היא על שלושת האינדקסים i, j, k.

דוגמה: את המכפלה המשולשת נרשום כך:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_i\,(\vec{B}\times\vec{C})_i \tag{53}$$
$$= \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \tag{54}$$

בשלב הראשון כאן הבענו את המכפלה הסקלרית לפי משוואה (50), ובשלב השני את המכפלה הווקטורית לפי משוואה (51). שימו לב שבניגוד לביטוי המקורי עם הווקטורים, הסדר בו רשומים הגורמים בביטוי עם האינדקסים אינו חשוב, כי מדובר בהכפלה של רכיבים (שהם מספרים רגילים) ורק אחר כך סכימה על כל המכפלות האלה עם כל הערכים האפשריים של האינדקסים הקשורים. בשפה זו ניתן לראות בקלות את התכונה הציקלית של המכפלה המשולשת:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \tag{55}$$
$$= \epsilon_{kij}A_iB_jC_k \tag{56}$$
$$= C_k\epsilon_{kij}A_iB_j \tag{57}$$
$$= C_k\,(\vec{A}\times\vec{B})_k \tag{58}$$
$$= \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{59}$$

כאשר במעבר מהשורה הראשונה לשנייה השתמשנו בתכונה הציקלית של ϵ_{ijk}.

אובייקט חשוב נוסף (טנזור אינווריאנטי מדרגה 2, כפי שנראה בהמשך) הוא **הדלתא של קרונקר** δ_{ij} **(Kronecker delta)**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \tag{60}$$

בשונה מ־ϵ_{ijk}, הדלתא של קרונקר הוא סימטרי:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{61}$$

תכונה שימושית של δ_{ij} היא

$$\delta_{ij}A_j = A_i \tag{62}$$

הדבר מתקיים מכיוון ש־δ_{ij} משאיר רק איבר אחד מהסכום על j – האיבר עם $i=j$. בצורה יותר מפורשת:

$$\delta_{ij}A_j = \sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}A_j = \delta_{i1}A_1 + \delta_{i2}A_2 + \delta_{i3}A_3 = A_i \tag{63}$$

על ידי שימוש בקשר זה רואים ש־

$$\delta_{ij}A_iB_j = A_iB_i = \vec{A}\cdot\vec{B} \tag{64}$$

ניתן לקבל את משוואה (64) גם בדרך קצת שונה: בביטוי באגף שמאל יש סכימה על כל הקומבינציות האפשריות של i ו־j, אבל δ_{ij} מאפס כל איבר שבו $i\neq j$, מה שמשאיר את שלושת האיברים שבהם $i=j$, כלומר $A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$.

זהות אחת שימושית המקשרת בין סימן לוי־צ'יוויטה לדלתא של קרונקר היא

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} \tag{65}$$

נבדוק את נכונותה:

- צד ימין: נקבל 1 רק אם $j = \ell$, $k = m$ ו־$j \neq k$. נקבל -1 רק אם $j = m$, $k = \ell$ ו־$j \neq k$. עבור שאר האפשרויות מקבלים 0.
- צד שמאל: עבור $j = \ell$, $k = m$ נקבל $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 1$ בתנאי ש־$j \neq k$ (אחרת אפס). עבור $j = m$, $k = \ell$ נקבל $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ikj} = -1$ בתנאי ש־$j \neq k$ (אחרת אפס). שאר האפשרויות מתאפסות.

דוגמה להוכחה של זהות וקטורית באמצעות הזהויות במשוואות (65) ו־(64):

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i && (66)\\
&= \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{i\ell m} C_\ell D_m && (67)\\
&= (\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell})\, A_j B_k C_\ell D_m && (68)\\
&= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) && (69)
\end{aligned}$$

ביתר פירוט וללא קיצור הדרך של הסכם הסכימה, ההוכחה נראית כך:

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) \quad &= \sum_{i=1}^{3} (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j B_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{i\ell m} C_\ell D_m \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{i\ell m} \right) A_j B_k C_\ell D_m \\
&= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} (\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell})\, A_j B_k C_\ell D_m \\
&= \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \delta_{j\ell} A_j C_\ell \right) \left(\sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{km} B_k D_m \right) \\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{jm} A_j D_m \right) \left(\sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \delta_{k\ell} B_k C_\ell \right) \\
&= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})
\end{aligned} \tag{70}$$

כאן ניתן לראות בצורה יותר מפורשת מדוע היה חשוב לתת לאינדקסים הקשורים שמות שונים במכפלה הווקטורית הראשונה (שם קראנו להם j ו־k) ובשנייה (שם קראנו להם ℓ ו־m). אם היינו נותנים להם אותם שמות בשני המקרים, לא היינו יכולים להוציא את סימני ה־$\sum$ החוצה במעבר מהשורה השנייה לשלישית.