פונקציות ונגזרות

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ב, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

פונקציות

פונקציה היא חוק השמה של קלט x לפלט $f(x)$. הקלט שעבורו הפונקציה מוגדרת (אוסף כל ערכי x) נקרא **תחום ההגדרה** של הפונקציה. הפלט (אוסף כל ערכי $f(x)$ שניתן לקבל) נקרא **הטווח** של הפונקציה. לדוגמה, עבור הפונקציה e^x תחום ההגדרה הוא כל הציר הממשי, $-\infty < x < \infty$, אבל הטווח הוא המספרים החיוביים: $e^x > 0$.
הפונקציה ההופכית לפונקציה f, שנסמנה f^{-1}, היא הפונקציה המקיימת

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{1}$$

לדוגמה, הפונקציה ההופכית של e^x היא $\ln x$.

גבולות

הגבול של פונקציה $f(x)$ כש־x מתקרב ל־x_0 הוא הערך f_0 אם ערך הפונקציה מתקרב לערך זה כאשר x מתקרב ל־x_0, ויסומן

$$f_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \tag{2}$$

דוגמה:

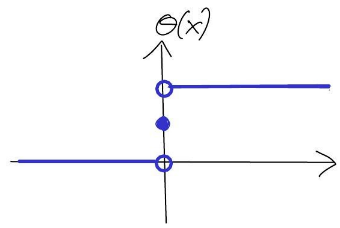
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2 \tag{3}$$

נדגיש שבתהליך לקיחת הגבול $x \neq x_0$ בכל שלב, לכן העובדה ש־$(x-1)$ מתאפס עבור $x = 1$ לא הפריעה לנו לחלק בו.

מתקיימות התכונות הבאות:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = f_0 g_0$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$ אם $g_0 \neq 0$.

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.



איור 1: פונקציות מדרגה.

לפעמים הפונקציה מתקרבת לערכים שונים עבור $x < x_0$ ועבור $x > x_0$. במקרים כאלה נבדיל בין **גבול שמאלי** ו**גבול ימני**. נסמן גבול שמאלי ב־

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \tag{4}$$

וגבול ימני ב־

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \tag{5}$$

לדוגמה, עבור **פונקציית המדרגה** (המוצגת באיור 1)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

הגבול השמאלי בנקודה $x = 0$ הוא 0, הגבול הימני הוא 1, אבל ערך הפונקציה באותה נקודה הוא $1/2$.

נגזרות

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 תסומן $f'(x_0)$, והיא הגבול

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{7}$$

הנגזרת מתארת את קצב השינוי של הפונקציה כתלות ב־x. סימונים נוספים לנגזרת הם

$$f'(x) \equiv \dot{f}(x) \equiv \frac{df}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f \tag{8}$$

כאשר הסימון $\equiv$ מתאר שקילות. הנגזרת השנייה (הנגזרת של הנגזרת הראשונה) מסומנת

$$f''(x) \equiv \ddot{f}(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{d^2}{dx^2} f \tag{9}$$

דוגמה: נוכיח לפי ההגדרה ש־ $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$. ואומנם:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0 \quad (10)$$

נגזרות של מספר פונקציות ידועות:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (11)$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad (12)$$
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad (13)$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad (14)$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (15)$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (16)$$
$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \quad (17)$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \quad (18)$$

נגזרות מקיימות את היחסים הבאים:

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x) \quad (19)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x) + g'(x) \quad (20)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (21)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (22)$$

נוכיח לפי ההגדרה את כלל המכפלה לעיל:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y-x} && (23)\\
&= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(x)g(x)}{y-x} && (24)\\
&= \lim_{y\to x}\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}g(y)\right] + \lim_{y\to x}\left[f(x)\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right] && (25)\\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && (26)
\end{aligned}$$

עבור הרכבה של פונקציות מתקיים **כלל השרשרת**

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x) \tag{27}$$

ניתן לרשום זאת גם בצורה יותר אינטואיטיבית כ־

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \tag{28}$$

דוגמה:

$$f(x) = \sin\left(\frac{a}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{a}{x^2}\cos\left(\frac{a}{x}\right)$$

דוגמה: נגזרת של פונקציה מעריכית

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}(e^{\ln a})^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a \tag{29}$$

הנגזרת של פונקציה הופכית מקיימת

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{30}$$

כדי להבין משוואה זו, נסמן $y = f^{-1}(x)$ כך ש־$x = f(y)$ ונקבל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{31}$$

דוגמה: ניקח את הפונקציה $f(x) = e^x$ שלגביה ידוע ש־ $f'(x) = e^x$ ונחשב את הנגזרת של הפונקציה ההופכית שלה, $f^{-1}(x) = \ln x$:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \tag{32}$$

הקירוב הליניארי

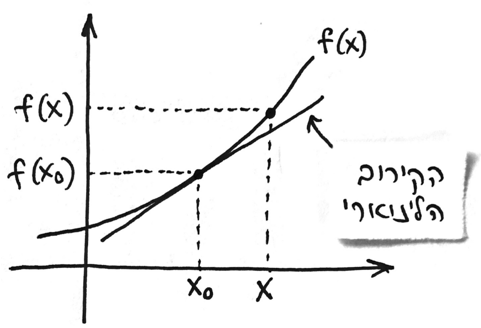
ניתן לרשום **קירוב ליניארי** לפונקציה באזור הנקודה x_0 באופן הבא:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{33}$$

זה מתקיים מפני ש־

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{34}$$

נשים לב שמשוואה (33) מתארת קו ישר. זהו הישר המשיק לפונקציה בנקודה x_0 – ראו איור 2.



איור 2: קירוב ליניארי לפונקציה.

כלל לופיטל

כלל לופיטל (L'Hôpital): אם

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \tag{35}$$

אז מתקיים

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{36}$$

בתנאי שהגבול $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

הסבר: נשתמש בקירוב הליניארי עבור הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ באזור הנקודה $x = c$:

$$f(x) \simeq 0 + f'(c)(x-c) \tag{37}$$

$$g(x) \simeq 0 + g'(c)(x-c) \tag{38}$$

ונקבל

$$\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{39}$$

דוגמה:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \tag{40}$$

הרחבות לכלל לופיטל:

1. הכלל תקף גם כאשר $c = \infty$. כדי להוכיח זאת, נגדיר משתנה $y = 1/x$ ונשתמש בכלל לופיטל המקורי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0}\frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{41}$$

2. אותו הכלל תקף גם עבור המקרה של

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty \tag{42}$$

גם כאן ההוכחה משתמשת בכלל לופיטל המקורי:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to c}\frac{-g'(x)/g(x)^2}{-f'(x)/f(x)^2} = \frac{\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{43}$$

מכאן נחלץ ש־

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{44}$$

דוגמה:

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\ \frac{1}{e^x} = 0 \tag{45}$$