

מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 1

ווקטורים

הגדרות

הכפלה בין ווקטורים

- מכפלה סקלרית

מכפלה שתוצאתה סקלר. המכפלה הסקלרית בין שני ווקטורים \vec{A}, \vec{B} מוגדרת על ידי

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &\equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta\end{aligned}$$

כאשר θ היא הזווית בין שני הווקטורים. המשמעות הגיאומטרית של מכפלה סקלרית היא מכפלה של ההיטל של ווקטור \vec{A} על הווקטור \vec{B} ולהפך. המכפלה מתאפסת עבור ווקטורים מאונכים.

תרגיל 1

הוכח את השוויון

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &\equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta\end{aligned}$$

פתרון

נבחר מערכת צירים קרטזית בה הווקטור \vec{A} מונח על ציר \hat{x} כך ש $\vec{A} = A\hat{x}$ ו $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$. המכפלה הסקלרית היא

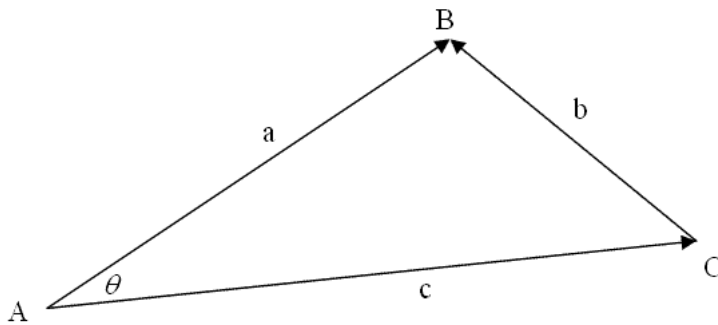
$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y = \\ AB_x &= AB \frac{B_x}{B} = AB \cos \theta = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta\end{aligned}$$

כאשר θ היא הזווית בין הווקטורים

תרגיל 2

הוכיחו את משפט הקוסינוסים בעזרת חשבון וקטורי. (למשל חיבור/חיסור ווקטורים, מכפלה סקלרית)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta \quad (1)$$



פתרון

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = ac \cos \theta$$

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$$

$$\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = a^2 + c^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$$

• מכפלה וקטורית

מכפלה בין וקטורים שתוצאתה וקטור. המכפלה הוקטורית בין שני וקטורים \vec{A}, \vec{B} מוגדרת על ידי

$$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta) \hat{n}$$

כאשר θ היא הזווית בין הוקטורים ו \hat{n} הוא וקטור יחידה הניצב לוקטורים \vec{A}, \vec{B} וסימנו מוגדר לפי כלל יד ימין. הצורה המפורשת של המכפלה הוקטורית היא

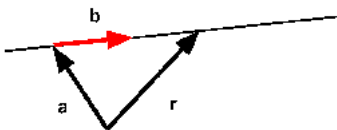
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

נוח לכתוב אותה בצורה של דטרמיננטה:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

משוואת קו ישר



משוואת הקו הישר "בוחרת" רק את הנקודות על הקו הישר הרצוי.

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$
$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

משוואת המישור

ניקח (x_0, y_0, z_0) נקודה במישור, ויהא $\mathbf{N} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$ הנורמל למישור. נמצא את כל הנקודות (x, y, z) על המישור. הווקטור

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\hat{x} + (y - y_0)\hat{y} + (z - z_0)\hat{z}$$

הוא על המישור אם

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

לכן משוואת המישור היא

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ניתן להעביר קבועים ולרשום

$$ax + by + cz = d$$

משוואה זו מייצגת אף היא את משוואת המישור. את d נמצא על ידי הצבת נקודה שאנחנו כבר יודעים שנמצאת על המישור.

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

תרגיל 3

- מצאו את משוואת המישור המכיל את הנקודות $(1, 2, 3)$, $(1, 0, 2)$, $(2, 4, 2)$.
- באיזו נקודה הישר העובר דרך הנקודות $(1, 0, -2)$, $(9, 32, 14)$ חותך את המישור?

פתרון

1. נפרוש את המישור על ידי שני וקטורים המתחילים מאותה נקודה

$$\vec{a} = (1, 2, 3) - (1, 0, 2) = (0, 2, 1)$$

$$\vec{b} = (2, 4, 2) - (1, 0, 2) = (1, 4, 0)$$

הוקטור המאונך למישור זה הינו

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{x}(2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) + \hat{y}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + \hat{z}(0 \cdot 4 - 1 \cdot 2) \\ &= -4\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z} = \end{aligned}$$

לכן משוואת המישור הינה

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \mathbf{N} &= d \\ -4x + y - 2z &= d \end{aligned}$$

נמצא את d ע"י הצבת נקודה, לדוגמא $(1, 0, 2)$

$$-4 - 4 = d \Rightarrow d = -8$$

ומשוואת המישור הינה

$$-4x + y - 2z = -8$$

$$4x - y + 2z = 8$$

2. משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(1, 0, -2)$, $(9, 32, 14)$ היא

$$\vec{r} = (9, 32, 14) = (1, 0, -2) + \lambda \hat{b}$$

$$\lambda \hat{b} = (9, 32, 14) - (1, 0, -2) = (8, 32, 16)$$

מכיוון ש- λ יכול להיות כל מספר בשביל הנוחות נוציא מכנה משותף מהווקטור ונכניס אותו ל- λ

$$\lambda \hat{b} = (8, 32, 16) = 8(1, 4, 2) \rightarrow \hat{b} = (1, 4, 2)$$

כלומר, עבור הנקודה $\vec{r} = (9, 32, 14)$ צריך לקחת $\lambda = 8$.
נכתוב את משוואת הישר הכללית

$$\vec{r} = (1, 0, -2) + \lambda(1, 4, 2)$$

או, לפי רכיבים

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 4\lambda \\ z &= -2 + 2\lambda \end{aligned}$$

נציב ערכים אלו במשוואת המישור ונקבל את הערך λ המבוקש

$$4(1 + \lambda) - 4\lambda + 2(-2 + 2\lambda) = 8 \Rightarrow \lambda = 2$$

ולכן נקודת החיתוך היא ב

$$\vec{r} = (1 + \lambda, 4\lambda, -2 + 2\lambda) = (3, 8, 2)$$