מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 2

אינדקסים

המשוואה הווקטורית

$$\vec{A} = \vec{B}$$

מבטאת בעצם שלוש משוואות, כי כל אחד מהרכיבים בפני עצמו צריך להיות שווה לרכיב המתאים בוקטור השנית את שלושת המשוואות ניתן לכתוב בצורה קומפקטית בעזרת אינדקסים

$$A_i = B_i$$

הדלתא של קרוניקר

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & else \end{cases}$$

סימן לוי צ'וויטה:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & cyclic \\ -1, & anticyclic \\ 0, & else \end{cases}$$

זהויות:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

הגדרות לפי אינדקסים:

- ווקטור

$$\vec{A} = \sum_i a_i \hat{i} = a_i \hat{i}$$
$$\vec{B} = \sum_i b_i \hat{i} = b_i \hat{i}$$

- הכפלה סקלרית

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i a_i b_i = a_i b_i$$
$$= \sum_{ij} \delta_{ij} a_i b_j = \delta_{ij} a_i b_j$$

- הכפלה ווקטורית

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{i} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{i}$$

- לפי רכיב ה־i

$$c_i = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

תרגיל 1

הראו באמצעות אינדקסים ש:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

פתרון

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k = -\epsilon_{ikj} a_j b_k = -\epsilon_{ikj} b_k a_j = -\left(\vec{B} \times \vec{A}\right)_i$$

תרגיל 2

הוכיחו את הזהות הבאה על ידי שימוש באינקסים:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

השתמשו בזהות:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

פתרון

$$\begin{aligned}
\left(\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)\right)_i =& \epsilon_{ijk} a_j \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)_k = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_\ell c_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_j b_\ell c_m \\
=& \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right) a_j b_\ell c_m \\
=& \delta_{i\ell}\delta_{jm} a_j b_\ell c_m - \delta_{im}\delta_{j\ell} a_j b_\ell c_m \\
=& a_j b_i c_j - a_j b_j c_i \\
=& b_i a_j c_j - c_i a_j b_j \\
=& \left[\vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\right]_i
\end{aligned}$$

תרגיל 3

הוכיחו את זהות יעקובי באמצעות אינדקסים:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)+\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$$

פתרון

$$\begin{aligned}\left[\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)+\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right]_i =&\epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{k\ell m}b_\ell c_m+\epsilon_{ijk}b_j\epsilon_{k\ell m}c_\ell a_m+\epsilon_{ijk}c_j\epsilon_{k\ell m}a_\ell b_m\\ =&\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)a_jb_\ell c_m+\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)b_jc_\ell a_m\\ &+\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)c_ja_\ell b_m\\ =&\delta_{i\ell}\delta_{jm}\left(a_jb_\ell c_m+b_jc_\ell a_m+c_ja_\ell b_m\right)\\ &-\delta_{im}\delta_{j\ell}\left(a_jb_\ell c_m+b_jc_\ell a_m+c_ja_\ell b_m\right)\\ =&a_jb_ic_j+b_jc_ia_j+c_ja_ib_j-a_jb_jc_i-b_jc_ja_i-c_ja_jb_i=0\end{aligned}$$

פונקציה

פונקציה היא כלל השמה של קלט x לפלט $f(x)$. הקלט עבורו הפונקציה מוגדרת (אוסף כל ערכי x) נקרא תחום ההגדרה של הפונקציה. הפלט (אוסף כל ערכי $f(x)$) נקרא טווח ההגדרה של הפונקציה.

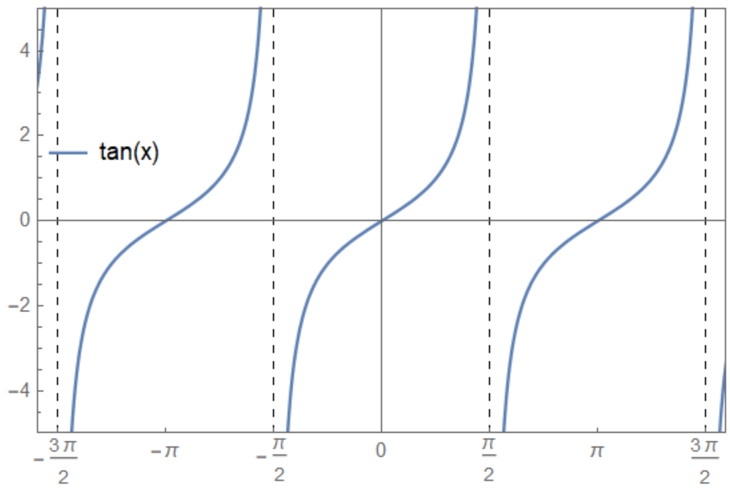
פונקציה הופכית

הפונקציה ההופכית $f^{-1}(x)$ היא פונקציה המקיימת $f^{-1}(f(x))=x$. כלומר, היא לוקחת כל ערך בטווח ההגדרה ומחזירה את הערך המתאים מתחום ההגדרה. בשפה חופשית, זו פונקציה ש"מבטלת" את פעולתה של f.
צריך לשים לב שלא תמיד טווח ההגדרה של $f^{-1}(x)$ הוא כל תחום ההגדרה של $f(x)$. למשל עבור הפונקציה $f(x)=x^2$, שתחום ההגדרה שלה הוא $-\infty<x<\infty$ הפונקציה ההופכית תהיה $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ שטווח ההגדרה שלה הוא $y>0$.
איך מציירים פונקציה הופכית?
המטרה שלנו היא להפוך תפקידים בין ציר x לציר y, נפרק לכמה תהליכים.

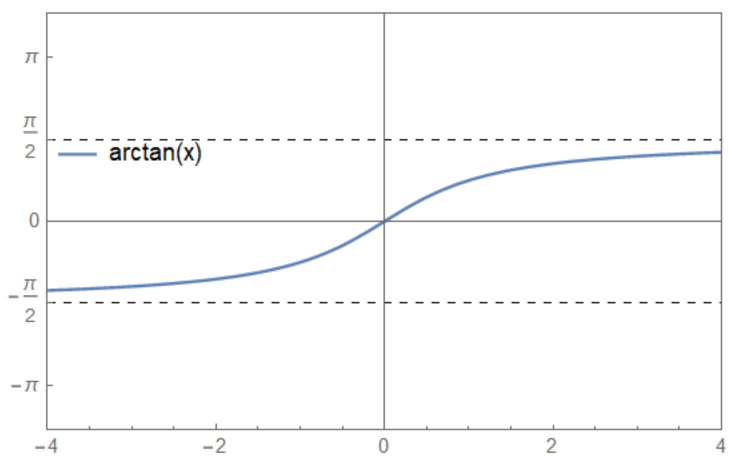
1. נחליף בין ציר y לציר x ע"י סיבוב ציר סביב ציר z ב־90 מעלות עם כיוון השעון.
2. כעת נרצה להעלות את ציר הx כלפי מעלה ע"י סיבוב של 180 מעלות של הציר שy יושב בו כעת.
3. נשנה בין התפקידים של הצירים x וy.

דוגמא

הפונקציה $\tan(x)$
תחום ההגדרה: $-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n<x<\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n$
טווח ההגדרה: $-\infty<\tan(x)<\infty$



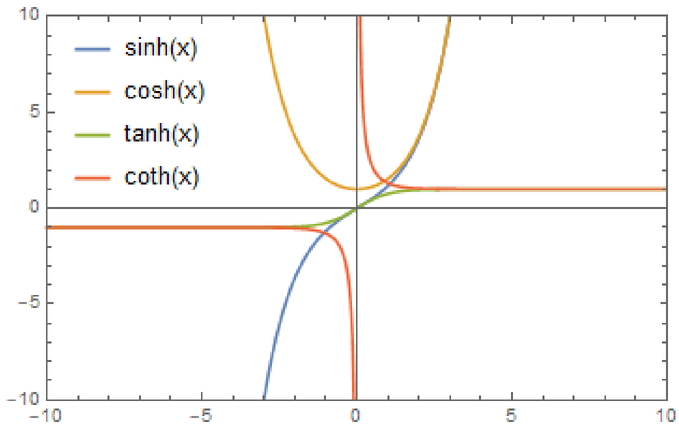
הפונקציה ההופכית $\arctan(x)$
תחום ההגדרה: $-\infty < x < \infty$
טווח ההגדרה: $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$



פונקציות היפרבוליות

הפונקציות ההיפרבוליות מוגדרות באופן הבא:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



ישנם הרבה זהויות היפרבוליות שניתן להוכיח, למשל:

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$$
$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1$$

דוגמא

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} =$$
$$= \frac{(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

תרגיל 4

מצאו את הפונקציה ההופכית של

$$\sinh(x)$$

פתרון

נסמן $y = \sinh(x)$

$$e^x = \sinh(x) + \cosh(x)$$
$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}$$
$$x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$$

מכאן הפונקציה ההפוכה הינה:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

נגזרות

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 תסומן $f'(x_0)$, והיא הגבול $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אם הגבול קיים אז הפונקציה נקראת גזירה בנקודה x_0 . סימון נוסף לנגזרת הוא $\frac{df}{dx}=f'(x)$.
עבור x כללי נכתוב

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

מתקיימות התכונות הבאות:

$$\frac{d}{dx}\left(cf\left(x\right)\right)=cf'\left(x\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)+g'\left(x\right)$$

כלל המכפלה:

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\frac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{\left(g\left(x\right)\right)^2}$$

עבור הרכבה של פונקציות מתקיים כלל השרשרת

$$\frac{d}{dx}\left[(f\circ g)(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right]=\frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

בתנאי ש־ g גזירה ב־ x ו־ f גזירה ב־ $g(x)$.
נגזרת הפונקציה ההופכית היא

$$\frac{df^{-1}}{dx}|_{x=b}=\frac{1}{\frac{df}{dx}|_{x=f^{-1}(b)}}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
f\left(f^{-1}\left(x\right)\right) &= x\\
\frac{d}{dx}\left[f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)\right] &= 1\\
f'\left(f^{-1}\left(x\right)\right)\cdot\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= 1\\
\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}
\end{aligned}$$

תרגיל 5

חשבו על פי הגדרת הנגזרת את נגזרת הפונקציה

$$f(x)=5x^3+4x$$

פתרון

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)^3 + 4(x+\Delta x) - 5x^3 - 4x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\left(x^3 + \Delta x^3 + 3x^2\Delta x + 3(\Delta x)^2 x\right) + 4(x+\Delta x) - 5x^3 - 4x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{15x^2\Delta x + 15(\Delta x)^2 x + 5(\Delta x)^3 + 4\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 15x^2 + 15x\Delta x + 5\Delta x^2 + 4 = 15x^2 + 4
\end{aligned}
$$

תרגיל 6

חשבו על פי הגדרת הנגזרת את נגזרת הפונקציה

$$f(x) = e^x$$

פתרון

נמצא את:

$$(e^x)'$$

נסמן:

$$y = e^x$$

$$\ln y = x$$

$$y' \ln' y = 1$$

$$y' = \frac{1}{\ln' y}$$

לכן נמצא את הנגזרת של פונקציית ה־$\ln$ על פי הגדרה:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\ln(y+\Delta y)-\ln(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)}{\Delta y}=\frac{1}{y}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)}{\Delta y/y}$$
$$=\frac{1}{y}\lim_{\Delta y\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)^{\frac{y}{\Delta y}}\right]=\frac{1}{y}\ln\lim_{\Delta y\to 0}\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)^{\frac{y}{\Delta y}}$$
$$=\left\{\frac{y}{\Delta y}=n\right\}=\frac{1}{y}\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{y}\ln e=\frac{1}{y}$$

מכאן:

$$y'=\frac{1}{\ln' y}=y$$

וקיבלנו כי:

$$(e^x)'=e^x$$

תרגיל 7

חשבו את הנגזרת של הפונקציה:

$$g\left(x\right)=\arctan\left(x\right)$$

פתרון

נסמן $f(x)=\tan x$ ו־$g(x)=f^{-1}(x)$
נזכור ש:

$$\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{\cos\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}+\frac{\sin^2\left(x\right)}{\cos^2\left(x\right)}=1+\tan^2\left(x\right)$$

ונקבל:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x)=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}$$

הקירוב הליניארי

כאשר אנחנו מתבוננים בנגזרת של פונקציה בנקודה מסויימת אנחנו יכולים להעריך שקרוב מאוד לאותה נקודה הנגזרת לא תשתנה הרבה ולכן לקרב את הפוקנציה לקו ישר שהשיפוע שלו הוא הנגזרת בנקודה הראשונית.

דוגמא

הפונקציה $\tan(x)$ סביב $x_0 = 0$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\tan(x) \approx \tan(0) + \frac{1}{\cos^2(0)}x = x$$

סביב $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\tan(x) \approx \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$