פיזיקה 1 לפיזיקאים

רמי ברושטיין

הרצאה מספר 1 – איפיון תנועה, מיקום, מהירות, תאוצה

<u>מטרות ההרצאה:</u>

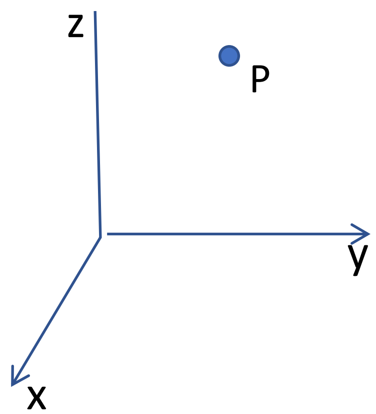
- תיאור של תנועת גופים
- ללמוד איך לומדים פיזיקה

ההרצאה עוקבת אחר פרקים 1.7, 1.8 בספר הלימוד

כדי לתאר תנועת גופים – למשל, מכונית נוסעת, כדור נזרק, כוכב נע סביב חור שחור, עלינו לתאר את המיקום שלהם במרחב כתלות בזמן. לשם כך אנחנו בונים עולם דמיוני המתואר על ידי גדלים מתמטיים המקיימים קשרים מתמטיים: משוואות וחוקים. לאחר מכן, עלינו לקשר את המתרחש בעולם הדמיוני לעולם המציאות.

"זירת ההתרחשות" – המרחב

אנחנו משתמשים בקואורדינטות כדי לאתר מיקום של **נקודה במרחב**, למשל קואורדינטות קרטזיות, x, y, z. הנקודה P היא נקודה במרחב מופשט המוגדרת על ידי שלוש קואורדינטות.



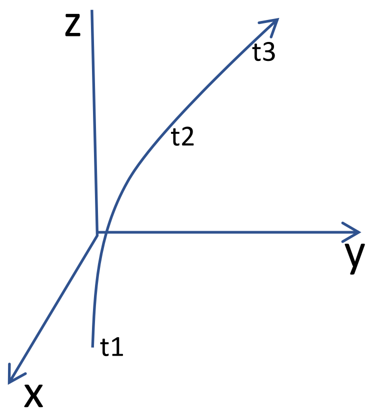
$$P \equiv (x, y, z) = \vec{r}$$

לגדלים x, y, z יש מימדים של אורך: מטר, ס"מ, מייל ואינם מספרים טהורים ולכן ערכם המספרי נקבע על ידי בחירת היחידות.

איך מגדירים יחידות אורך? באמצעות מהירות האור ויחידת זמן.

איך מודדים מיקום? GPS בטלפון, עוד שיטות?

מסלול במרחב מתואר על ידי עקומה: אוסף של נקודות $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$



הזמן הוא פרמטר שיש לו מימד של זמן: שניות, דקות, ימים.

איך מגדירים זמן? באמצעות תדר של קרינה שאטומים פולטים.

איך מודדים זמן? שעון, עוד שיטות ?

בעולם הדמיוני, אנחנו מתעלמים מהגודל המרחבי של העצם הנע ומתכונות אחרות שלו ומתארים את המיקום שלו באמצעות נקודה במרחב ואת מסלול התנועה שלו באמצעות עקומה במרחב.
נוכל גם להגדיר **מהירות:** כלומר בקצב שינוי המיקום, כמה מרחק הגוף עובר בזמן נתון. למהירות יחידות של אורך לחלק לזמן (מ'\ש')

מהירות ממוצעת נסמן ב $\bar{\mathrm{v}}$

$$\bar{\mathrm{v}} = \left(\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \right)$$
$$\bar{\mathrm{v}} = (\bar{\mathrm{v}}_x, \bar{\mathrm{v}}_y, \bar{\mathrm{v}}_z)$$

למשל מכונית נוסעת מב"ש לתל-אביב, המרחק בערך 100 ק"מ, זמן הנסיעה שעה ורבע, המהירות הממוצעת 80 קמ"ש, 100/1.25 = 80 .

אפשר להגדיר גם **מהירות רגעית** $\mathrm{v}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ כלומר מהירות ממוצעת כאשר הפרש הזמנים קטן. (מה המשמעות של "קטן" ?)

מסמנים גם $\mathrm{v}_x = \dot{x}$, $\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}$

המהירות היא וקטור $\vec{\mathrm{v}} \equiv \mathrm{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

איך מודדים מהירות רגעית?
איך מד מהירות במכונית מודד מהירות?
איך שוטר מודד מהירות של אותה מכונית?
איך אסטרונום מודד מהירות של גלקסיה רחוקה?

אנחנו מתעניינים גם ב **תאוצה ,** כלומר בקצב שינוי המהירות, בכמה המהירות משתנה בזמן נתון

$$\bar{a} = \left(\frac{\mathrm{v}_x(t_2) - \mathrm{v}_x(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{\mathrm{v}_y(t_2) - \mathrm{v}_y(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{\mathrm{v}_z(t_2) - \mathrm{v}_z(t_1)}{t_2 - t_1} \right)$$

$$\vec{a} = (\dot{\mathrm{v}}_x, \dot{\mathrm{v}}_y, \dot{\mathrm{v}}_z)$$

לתאוצה יחידות של אורך לחלק לזמן בריבוע (מ'\ש'^{2})
מתברר שתאוצה היא גודל פיזיקלי חשוב!
ונגזרות גבוהות יותר של המיקום?

<u>קשרים בין מיקום, מהירות ותאוצה</u>

אם יודעים את המיקום כפונקציה של הזמן, אפשר למצוא את המהירות, מודדים את המיקום בזמנים שונים ומחשבים את המהירות (אפשר גם אחרת?), כנ"ל תאוצה, מודדים את המהירות בזמנים שונים ומחשבים את התאוצה (אפשר גם אחרת?).

ומה אם אנחנו יודעים את המהירות ורוצים לדעת את המיקום?

נחשב כך:

$$x(t) = x(t_0) + \mathrm{v}_x(t_0)\Delta t + \mathrm{v}_x(t_0+\Delta t)\Delta t + \mathrm{v}_x(t_0+2\Delta t)\Delta t + \cdots \equiv$$

$$x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}_x(s)ds$$

באותה צורה

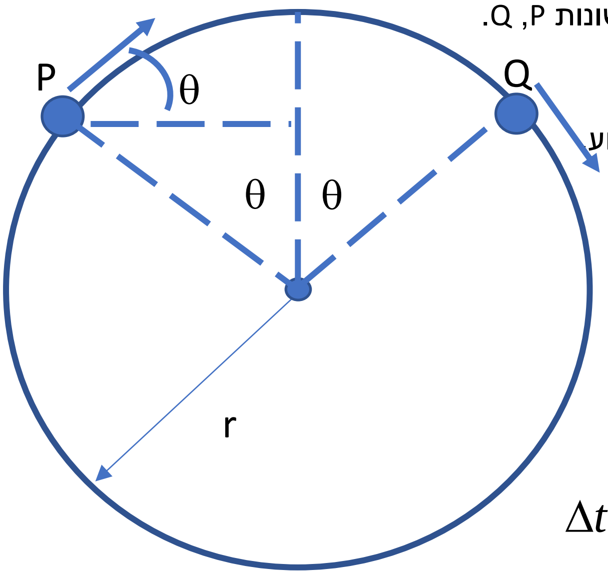
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\mathrm{v}}(s)ds$$

וגם

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \vec{\mathrm{v}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(s)ds$$

דוגמה מעניינת: **תנועה מעגלית** (גודל המהירות קבוע)

התרשים מתאר גוף קטן הנע על מעגל בשתי נקודות שונות P, Q.



כיוון המהירות משתנה אבל הגודל שלה נשאר קבוע

כיוון וקטור המיקום משתנה אבל הגודל שלו נשאר קבוע

$$\mathrm{v}_{Px} = \mathrm{v}\cos\theta \qquad \mathrm{v}_{Qx} = \mathrm{v}\cos\theta$$

$$\mathrm{v}_{Py} = \mathrm{v}\sin\theta \qquad \mathrm{v}_{Qy} = -\mathrm{v}\sin\theta$$

המרחק שהגוף עבר הוא אורך הקשת

r x 2θ כאשר הזווית θ נמדדת בראדיאנים

$360^o = 2\pi$ radians

הזמן שלוקח לו לעבור את המרחק הוא $\Delta t = \dfrac{r\cdot 2\theta}{\mathrm{v}}$

התאוצה:

$$a_x = \frac{\mathrm{v}_{Qx} - \mathrm{v}_{Px}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}\cos\theta - \mathrm{v}\cos\theta}{\Delta t} = 0$$

$$a_y = \frac{\mathrm{v}_{Qy} - \mathrm{v}_{Py}}{\Delta t} = \frac{-\mathrm{v}\sin\theta - \mathrm{v}\sin\theta}{\Delta t} = \frac{-2\mathrm{v}\sin\theta}{\dfrac{2r\theta}{\mathrm{v}}} = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

כאשר הזווית θ קטנה, $\frac{\sin\theta}{\theta} \sim 1$ ולכן

$$a_x = 0$$

$$a_y = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}$$

באופן כללי, עבור מיקום כלשהו על המעגל, התאוצה תמיד לכיוון המרכז,

$$\vec{a} = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}\hat{r}$$

$$a_x = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}\cos\phi(t)$$

$$a_y = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}\sin\phi(t)$$

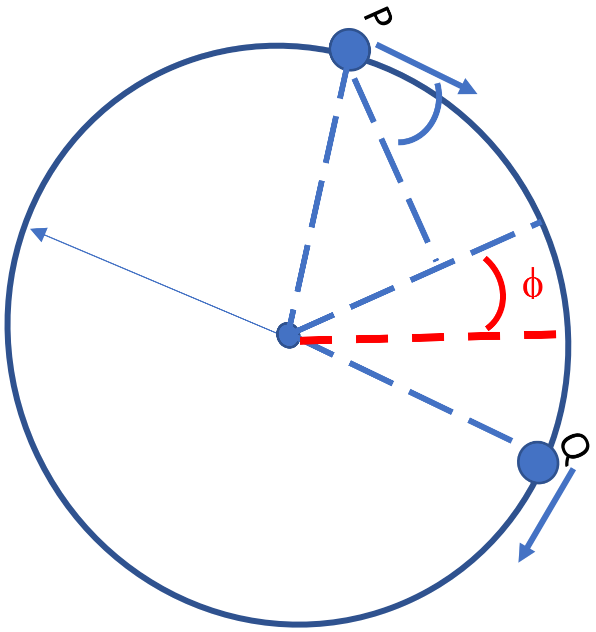
כאשר ϕ הזווית בין ציר x למיקום הגוף

וגודל המהירות קבוע

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}\cos\phi(t)$$

$$\mathrm{v}_y = -\mathrm{v}\sin\phi(t)$$

$$\mathrm{v}_x{}^2 + \mathrm{v}_y{}^2 = \mathrm{v}^2$$



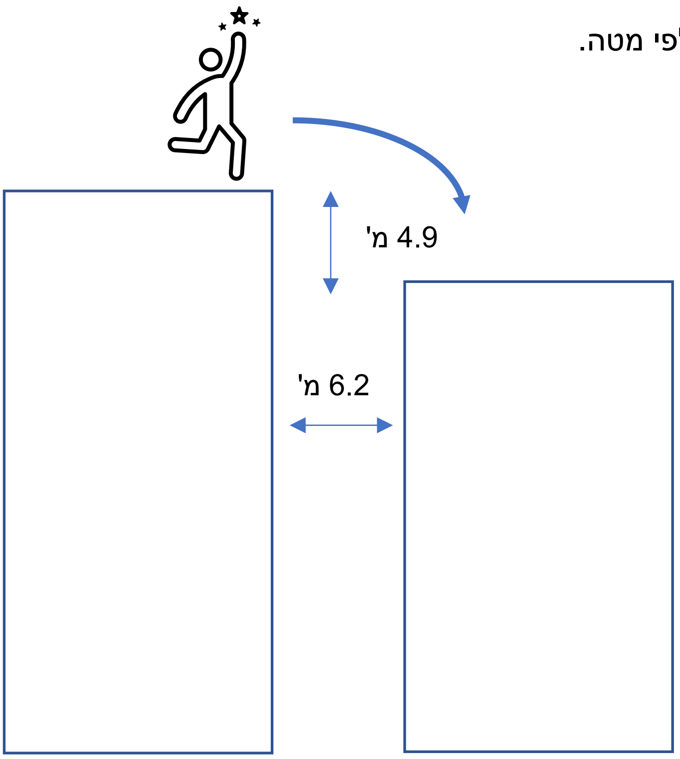
שאלה (קלה) לדוגמה

כפיל בסרטים צריך לקפוץ מגג בית בן 10 קומות לבית שכן בן 9 קומות. המרחק האופקי בין הבתים 6.2 מ' והפרש הגבהים ביניהם 4.9 מ'.

א. מהי המהירות המזערית אותה חייב הכפיל לפתח כדי להגיע בשלום ?
ב. מהי מהירות הנחיתה שלו על גג הבית השני במקרה המתואר בסעיף א' ?
ג. האם יגרם לכפיל נזק גופני ?

נפתור את התרגיל על ידי מעקב אחר חמשת השלבים לפתרון התרגיל.

1. בניית תמונה מחשבתית. מה מתואר בשאלה ? אילו חוקי תנועה רלוונטיים? הערכה איכותית של הפתרון, תרשים.
- המהירות בכיוון אופקי קבועה
- התאוצה בכיוון אנכי קבועה 9.8 מ'/ש'^{2} כלפי מטה.



הערכה איכותית של הפתרון?

2. מה נתון? $\Delta x=6.2$ m, $\Delta y=4.9$ m

מהם הנעלמים ? t_f זמן הפגיעה בגג השני, $v_x(t=0)$, v_x, $v_y\ (t=t_f)$

3. כתיבת המשוואות

$$v_y(t)=\int_0^t a_y(s)ds=\int_0^t -g ds=-gt$$

$$a_y=-g$$

$$v_y(t=0)=0$$

פתרון כללי של המשוואות:

$$(1)\quad y(t_f)=y(t=0)+\int_0^{t_f}-gsds=-\tfrac{1}{2}gs^2\Big|_0^{t_f}=y(t=0)-\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$(2)\quad \Delta y=y(t_f)-y(t=0)=-\tfrac{1}{2}gt_f^{\;2}$$

$$(3)\quad \Delta x=\mathrm{v}_x(t=0)\,t_f$$

$$(4)\quad \mathrm{v}_x(t_f)=\mathrm{v}_x(t=0)$$

$$(5)\quad \mathrm{v}_y(t=0)=0$$

$$(6)\quad \mathrm{v}_y(t_f)=-gt_f$$

האם יש משוואת כמספר הנעלמים? (2) קובעת את t_f, (3) ו (4) את V_x ו (6) את V_y ,

בדיקת יחידות, כל הגדלים מובעים באמצעות t_f .

4. פתרון המשוואות

ממשוואה (2) מקבלים

$$t_f=\pm\sqrt{-\frac{2\Delta y}{g}}=\pm\sqrt{-\frac{2\cdot 4.9m}{9.8m/s^2}}$$

$$t_f=\pm 1s$$

צריך לבחור סימן, ובוחרים את סימן ה פלוס.

א. נפתור עבור v_x

$$\Delta x=\mathrm{v}_x\,t_f=\mathrm{v}_x\sqrt{-\frac{2\Delta y}{g}}$$

$$\Delta x=6.2m\Rightarrow 6.2m=\mathrm{v}_x 1s\Rightarrow \mathrm{v}_x=6.2m/s$$

ב. נפתור עבור v_y , ממשוואה (6) נקבל

$$\mathrm{v}_y(t_f)=-gt_f=-9.8m/s$$

גודל המהירות

$$\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_x^{\;2}+\mathrm{v}_y^{\;2}}=11.6m/s\simeq 41.75kmh$$

ג. כלומר הנפילה כמו התנגשות בקיר במהירות של בערך 40 קמ"ש. גבולי מאוד

5. בדיקה
   - יחידות
   - הגיון , 1 ש'
   - גבולות, הפרש גבהים גדול ← יותר זמן פחות מהירות
   - התאמה להערכה?

<u>שאלה (קשה) לדוגמה: זריקת 3 נקודות בכדורסל.</u>

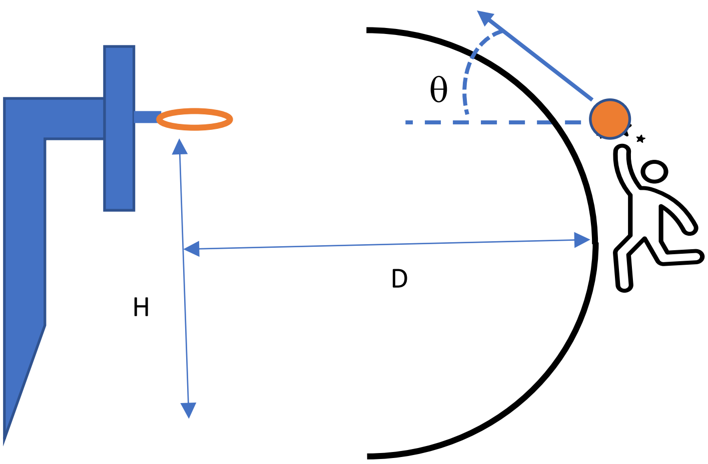
שחקן כדורסל זורק כדור מעבר לקו שלוש הנקודות מגובה של 2.5 מ'=h במהירות התחלתית שגודלה v_0 בזווית θ .

קוטר הכדור 24 ס"מ, קוטר הטבעת 45 ס"מ, גובה הטבעת מהרצפה 3.05 מ'=H, מרחק קוו השלוש מהטבעת 7.24 מ'=D

א. חשבון את התלות $v_0(\theta, h, H, D)$

ב. מהי הזווית האופטימלית לזריקה?

1. בניית תמונה מחשבתית. מה מתואר בשאלה ? אילו חוקי תנועה רלוונטיים? הערכה איכותית של הפתרון, תרשים.
   צריך לאזן בין הרצון לזרוק בזווית גדולה ככל האפשר ובין הצורך להגביל את המהירות



2. מה נתון? h, H, D
   מהם הנעלמים ? v_0, θ ,

3. כתיבת המשוואות

$$(1) \quad x(t) = v_0 \cos\theta\, t$$

$$(2) \quad y(t) = h + v_0 \sin\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

תנא יהתחל ה

$$(3) \quad y(x = D, t = t_f) = H$$

$$(4) \quad y(x = 0, t = 0) = h$$

4. פתרון המשוואות

$$t=\frac{x}{\mathrm{v}_0\cos\theta}$$

$$\mathrm{v}_0\sin\theta t=x\tan\theta$$

$$y(x)=h+x\tan\theta-\tfrac{1}{2}\frac{g}{\mathrm{v}_0^2\cos^2\theta}x^2$$

א. נציב תנאי התחלה (3):

$$H=h+D\tan\theta-\tfrac{1}{2}\frac{g}{\mathrm{v}_0^2\cos^2\theta}D^2$$

$$\mathrm{v}_0^2=\tfrac{1}{2}\frac{g}{\cos^2\theta}D^2\frac{1}{h+D\tan\theta-H}$$

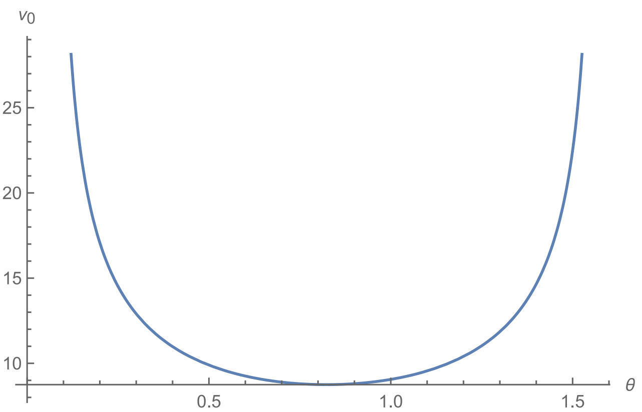
$$\mathrm{v}_0=+\frac{D}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{g}{h+D\tan\theta-H}}$$

למה בחרנו את סימן הפלוס ?

נציב מספרים

$$\mathrm{v}_0=+\frac{7.24}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{9.8\,m/\sec^2}{2.5\,m+7.24\tan\theta\,m-3.05\,m}}$$

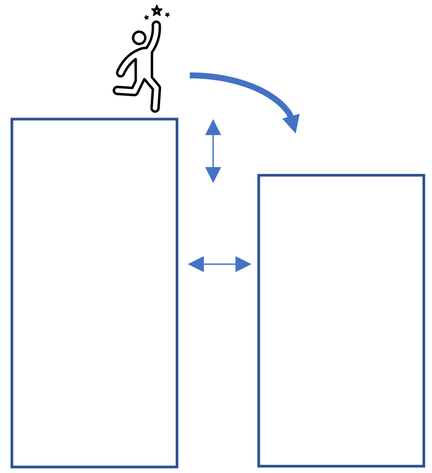
בתוכנה פשוטה (matlab, mathematica) אפשר לצייר גרף

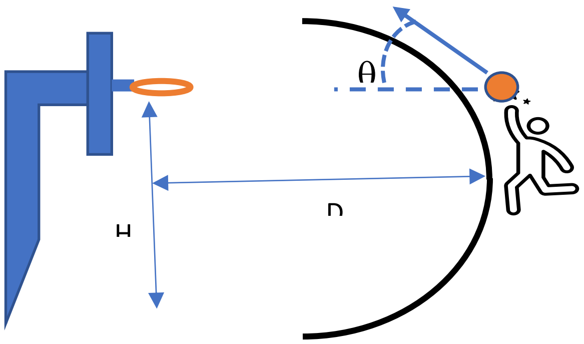


ב. זווית אופטימלית: ??? שאלה לדיון ...

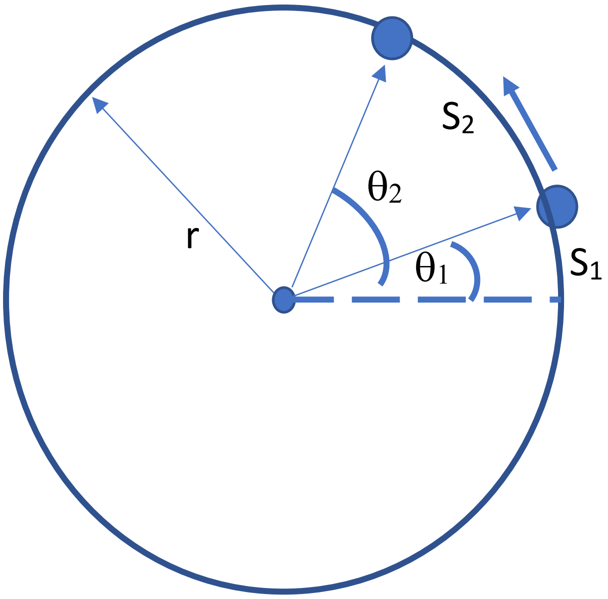
5. בדיקה: יחידות, הגיון, גבולות, התאמה להערכה ראשונית, ...

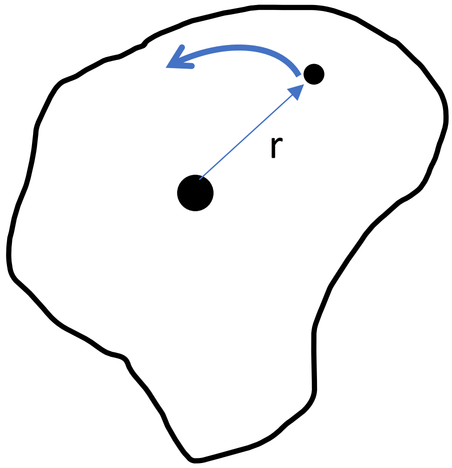
הבנה: אותה שאלה, הנתונים אחרים, הנעלמים אחרים!





תנועה סיבובית





ברדיאנים $S=\theta\, r,\ \theta=S/r$ $\qquad \theta:0 \rightarrow 2\pi$

מהירות זוויתית: $\omega=d\theta/dt$ יחידות של 1/ש'

תאוצה זוויתית: $\alpha=d\omega/dt=d\theta^2/dt^2$ יחידות של 1\ש'^{2}

כאשר הרדיוס קבוע בזמן (תנועה על מעגל) $S(t)=\theta_0\, r+\omega_0\, r(t-t_0)$

המהירות המשיקית v_T נתונה ע"י $dS/dt=d\theta/dt\, r=\omega\, r \rightarrow vT = \omega\, r$

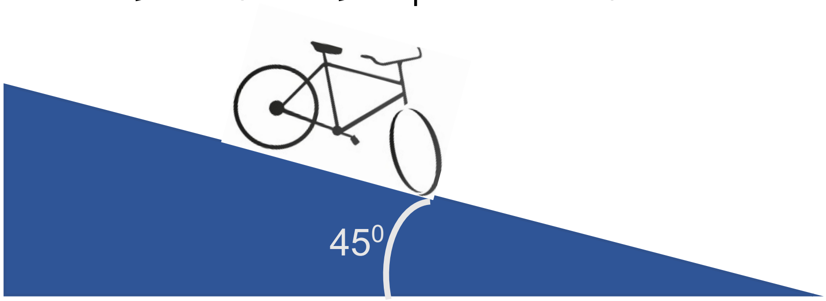
התאוצה משיקית: $a_T=dv_T/dt=\alpha r$ יחידות של 1\ש'^{2}

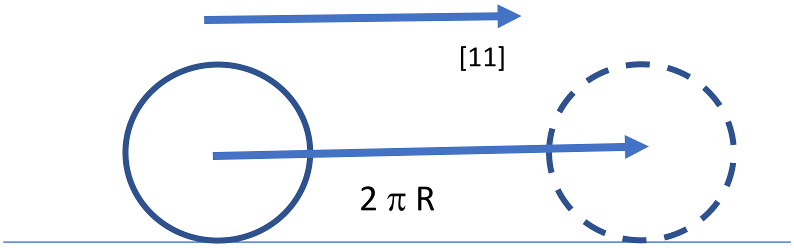
התאוצה הרדיאלית (בכיוון הרדיוס) : $a_R=-v_T^2/r=-\omega^2 r$ יחידות של 1\ש'^{2}

<u>שאלה (קלה) לדוגמה: מהי התאוצה הזוויתית של גלגל אופניים.</u>

רוכב אופניים נוסע על כביש בשיפוע 45^0 , רדיוס גלגל האופניים 0.5 מ' = R והתאוצה הקווית שלו בכיוון הכביש היא 2 ש'^{2}/מ' . הגלגל אינו מחליק . מהי התאוצה הזוויתית של גלגל אופניים ?

1. בניית תמונה מחשבתית. מה מתואר בשאלה ? אילו חוקי תנועה רלוונטיים? הערכה איכותית של הפתרון, תרשים.





$\theta:0 \rightarrow 2\pi$, $x:0 \rightarrow 2\pi R$

הערכה: הקף הגלגל $2\pi R \sim 3\ m$, האיץ ב 2 מ'/ש'^{2} . כלומר ב 2/3 סיבוב לשנייה בכל שנייה,
כלומר $\alpha \sim 4\pi/3\ rad/s^2$

2. מה נתון? גודל התאוצה הקווית בכיוון הכביש. זווית ההטיה של הכביש 45^0 . מהם הנעלמים ? התאוצה הזוויתית.

3. כתיבת המשוואות:

$$v(t) = \frac{2\pi R}{t} + v(t=0)$$

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{2\pi}{t}$$

4. פתרון המשוואות

$$\alpha(t) = \frac{a(t)}{R} = \frac{2m/s^2}{0.5m} = 4\,rad/s^2$$

5. בדיקה: יחידות, הגיון, גבולות, התאמה להערכה ראשונית, ...

שאלה (קשה) לדוגמה: גלגול בתוספת תנועה קווית.

ציקלואידה: גלגל ברדיוס R מתגלגל כך שהמרכז שלו נע במהירות
קבועה v לאורך ציר x   . הסיבוב וההתקדמות
מתואמים כך שאין החלקה (המרחק שעובר מרכז הגלגל שווה
לקשת שמתגלגלת על הרצפה). נתעניין במיקומה של הנקודה שעל
שפת הגלגל שנמצאת בתחילת התנועה בתחתית.

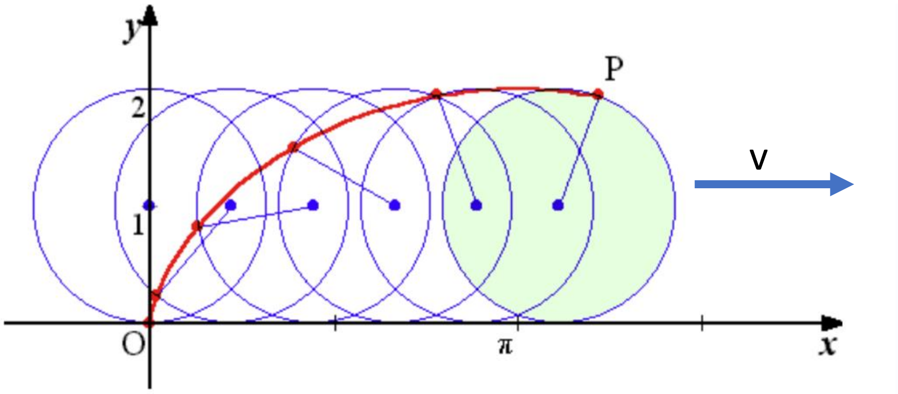
a. חשבו את המהירות הזוויתית בה מסתובב הגלגל.

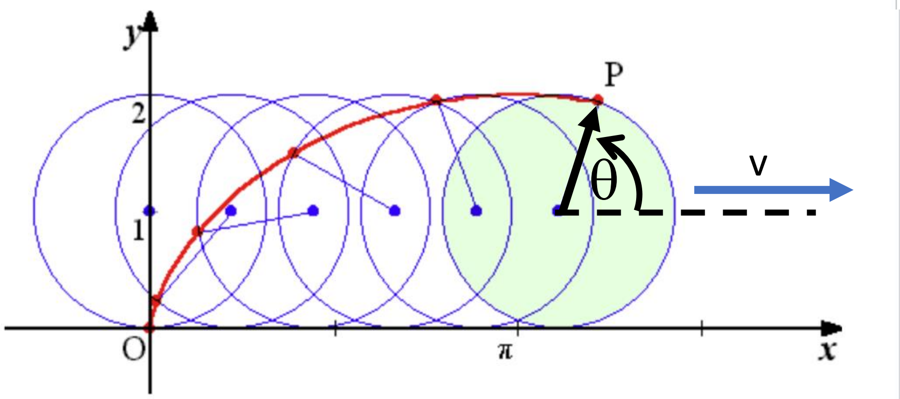
b. חשבו את וקטור מיקום הנקודה כפונקציה של הזמן .

$$r_p(t) = x_p(t)\hat{i} + y_p(t)\hat{j}$$

c. חשבו את מהירות הנקודה ואת תאוצתה. מתי המהירות מירבית? מינימלית? והתאוצה?

1. בניית תמונה מחשבתית. מה מתואר בשאלה ? אילו חוקי תנועה רלוונטיים? הערכה איכותית של הפתרון, תרשים.





2. מה נתון? גודל המהירות הקווית v, כיוון המהירות, רדיוס הגלגל R, מיקום הנקודה P בזמן t = 0 , הגלגול ללא החלקה . מהם הנעלמים ? $x_P(t), y_P(t)$. נסמן את מיקום מרכז הגלגל $x_C(t), y_C(t)$, θ הזווית של הווקטור ממרכז המעגל ל P **הנמדדת מכיוון ציר** x.

3. כתיבת המשוואות:

$$x_P(0) = 0,\ y_P(0) = -R, \theta(0) = \frac{3\pi}{2}$$

$$x_C(0) = 0,\ y_C(0) = 0$$

נבחר מהירות זוויתית ω המוגדרת כחיובית,

$$\theta(t) = \theta(0) - \omega t$$

$$x_C(t) = x_C(0) + \mathrm{v}\, t$$

$$\Delta x_C = -\Delta\theta\, R$$

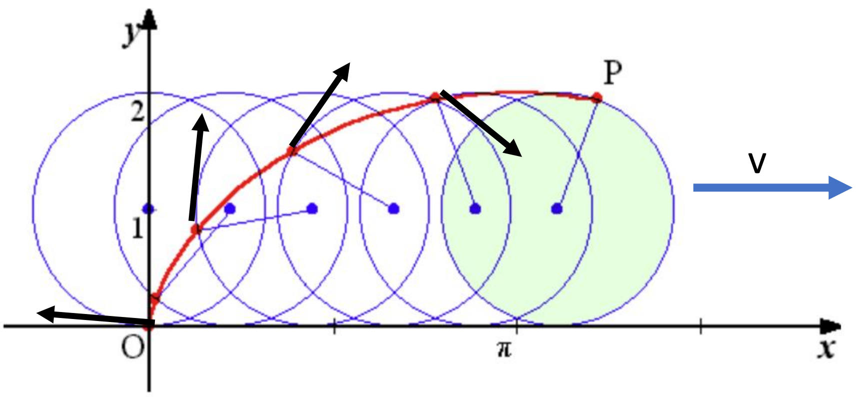
4. פתרון המשוואות

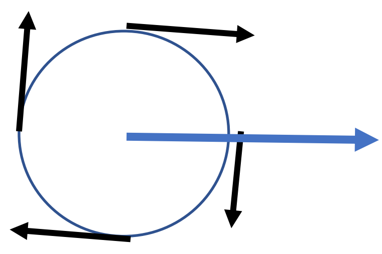
a.

$$\dot{x}_C(t) = -\dot{\theta}R = \omega R, \quad \omega = \frac{\mathrm{v}}{R}$$

$$\theta(t) = \theta(0) - \omega t = -\tfrac{\mathrm{v}}{R} t + \tfrac{3\pi}{2}$$

b.





$$\vec{x}_P(t) = \left(x_C(t) + R\cos(\theta(t)), R\sin(\theta(t))\right) =$$
$$= \left(\mathrm{v}\,t + R\cos\left(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2}\right), R\sin(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2})\right)$$

$$\vec{\mathrm{v}}_P(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(\mathrm{v} - R\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t), R\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t)\right) =$$
$$= \left(\mathrm{v} + \mathrm{v}\sin\left(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2}\right), -\mathrm{v}\cos(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2})\right)$$
$$\vec{a}_P(t) = \left(-\mathrm{v}\,\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t), \mathrm{v}\,\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)\right)$$
$$= \left(-\tfrac{\mathrm{v}^2}{R}\cos(\theta(t)), -\tfrac{\mathrm{v}^2}{R}\sin(\theta(t))\right) = -\tfrac{\mathrm{v}^2}{R}\left(\cos(\theta(t), \sin(\theta(t)\right) = -\tfrac{\mathrm{v}^2}{R}\hat{r}$$

c. כדי לחשב מינימום ומקסימום של הגודל של v_P ושל הגודל של a, צריך לגזור את v^2 ואת a^2 לפי הזמן, כי $dv^2/dt= 2\ v\ dv/dt$ ואז אם $dv^2/dt=0$ אז גם $dv/dt=0$
נתחיל עם a, ונראה שהגודל של a קבוע.

$$\vec{\mathrm{v}}_P{}^2(t) = \mathrm{v}^2\left(\left[1 + \sin\left(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2}\right)\right]^2 + \cos^2(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2})\right)$$
$$= \mathrm{v}^2\left(1 + 2\sin\left(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2}\right) + \sin^2\left(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2}\right) + \cos^2(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2})\right)$$
$$= 2\,\mathrm{v}^2\left(1 + \sin\left(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2}\right)\right)$$
$$\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}_P{}^2(t)}{dt} = -2\,\tfrac{\mathrm{v}^3}{R}\cos(-\tfrac{\mathrm{v}t}{R} + \tfrac{3\pi}{2})$$

ולכן, נקודת קיצון כאשר הקוסינוס מתאפס, ולכן הארגומנט של הקוסינוס הוא $\pi/2$ או $3\pi/2$ ואז הסינוס הוא 1 או -1 ואז המהירות או 2v או 0.

5. בדיקה: יחידות, הגיון, גבולות, התאמה להערכה ראשונית, ...