# מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 3

### הקירוב הליניארי

כאשר אנחנו מתבוננים בנגזרת של פונקציה בנקודה מסויימת אנחנו יכולים להעריך שקרוב מאוד לאותה נקודה הנגזרת לא תשתנה הרבה ולכן לקרב את הפוקנציה לקו ישר שהשיפוע שלו הוא הנגזרת בנקודה הראשונית.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

#### דוגמא

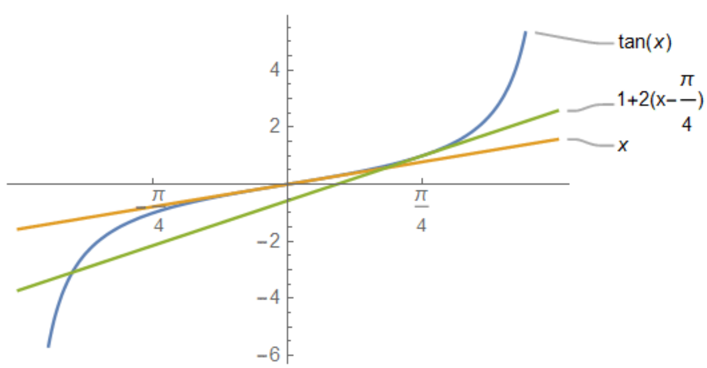
הפונקציה $\tan(x)$ סביב $x_0 = 0$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\tan(x) \approx \tan(0) + \frac{1}{\cos^2(0)}x = x$$

סביב $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\tan(x) \approx \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$




### טור טיילור

ניתן לכתוב כל פונקציה כפולינום סביב נקודה נבחרת, נבחר את הפולינום $P(x)$ כך שבנקודה הנבחרת הוא, וכל הנגזרות שלו, יהיו שווים בדיוק לפונקציה שלנו ולנגזרות שלה, במצב הזה גם קרוב לנקודה הנבחרת הפולינום יהיה שווה לפונקציה, אם ניקח אינסוף איברים, ואם ניקח רק מספר סופי של איברים הוא יהיה שווה לפונקציה בקירוב, בדרך כלל מספר קטן של איברים כבר יהיה מספיק קרוב כך שההפרש יהיה זניח. סביב הנקודה $x_0$:

$$P\left(x\right)=a_{0}\left(x_{0}\right)+a_{1}\left(x_{0}\right)\left(x-x_{0}\right)+a_{2}\left(x_{0}\right)\left(x-x_{0}\right)^{2}+a_{3}\left(x_{0}\right)\left(x-x_{0}\right)^{3}+...=f\left(x\right)$$

$$P\left(x_{0}\right)=a_{0}\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$$

$$P'\left(x_{0}\right)=a_{1}\left(x_{0}\right)=f'\left(x_{0}\right)$$

$$P''\left(x_{0}\right)=2a_{2}\left(x_{0}\right)=f''\left(x_{0}\right)\rightarrow a_{2}\left(x_{0}\right)=\frac{f''\left(x_{0}\right)}{2}$$

$$P'''\left(x_{0}\right)=6a_{3}\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)\rightarrow a_{3}\left(x_{0}\right)=\frac{f''\left(x_{0}\right)}{3!}$$

ובאופן כללי:

$$a_{n}\left(x_{0}\right)=\frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}$$

כלומר:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}\left(x-x_{0}\right)^{n}$$

**דוגמא - נוסחת אוילר**

נפתח את הפונקציה $e^{ix}$ סביב $x_{0}=0$

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}\left(x-x_{0}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}x^{n}=$$

$$=1+ix-\frac{x^{2}}{2!}-i\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+...=$$

$$=\left(1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+...\right)+i\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+...\right)=\cos\left(x\right)+i\sin\left(x\right)$$

ומכאן:

$$e^{-ix}=\cos\left(x\right)-i\sin\left(x\right)$$

מכאן נקבל את זהות אוילר:

$$e^{i\pi}+1=0$$

וכן נוכל להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות בעזרת אקספוננטים:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

### תרגיל 1

פתח לטור טיילור את הפונקציה $\ln(1+x)$ סביב הנקודה $x_0 = 0$ עד סדר כללי

### פתרון

נחשב את המקדמים של הטור:

$$f(x)|_{x=0} = \ln(1+x)|_{x=0} = 0$$

$$f^{(1)}(x)|_{x=0} = \frac{1}{1+x}|_{x=0} = 1$$

$$f^{(2)}(x)|_{x=0} = -\frac{1}{(1+x)^2}|_{x=0} = -1$$

$$f^{(3)}(x)|_{x=0} = \frac{2}{(1+x)^3}|_{x=0} = 2$$

$$f^{(4)}(x)|_{x=0} = -\frac{3!}{(1+x)^4}|_{x=0} = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)|_{x=0} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

כלומר:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

### נוסחת השארית

טור טיילור שווה במדוייק לפונקציה שהוא מקרב רק עבור אינסוף איברים.
אם ניקח רק מספר איברים סופי ישאר לנו הפרש בין סכום הטור לפונקציה עצמה, זוהי השארית של טור טיילור.
השארית של טור טיילור מסדר $n$ של פונקציה, $R_n$ היא ההפרש בין ערך הפונקציה לבין ערכו של סכום $n$ הרכיבים הראשונים בטור טיילור שלה:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

כאשר הפונקציה $f(x)$ ניתנת לגזירה $n+1$ פעמים, ניתן לחשב את השארית בעזרת הנוסחה הבאה:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

עבור $c$ כלשהו הנמצא בקטע $c \in [x_0, x]$.
לסיכום: טור טיילור הינו סכום של פולינומים ממעלה $n$ ושארית ממעלה $n+1$, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. במקרים רבים ניתן להעריך את השגיאה ללא ידיעה מפורשת של הערך $c$.

### תרגיל 2

חשב את הערך של $e$ עד לשגיאה של $0.01$ בעזרת נוסחת השארית

### פתרון

טור טיילור של אקספוננט סביב אפס הינו:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

והשארית שלו:

$$R_n(x) = e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

אנו מעוניינים במקרה בו $x=1$:

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 0.01$$

$$300 \leq (n+1)!$$

$$\rightarrow n = 5$$

מכאן שעבור הקירוב המבוקש עלינו להגיע עד לסדר חמישי בטור (שישה איברים):

$$e^1 = e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2 + \frac{86}{120} \approx 2.7167$$

בעוד הערך המדוייק של $e$ הוא:

$$e = 2.7182...$$

**משפט**

אם הטור של $f(x)$ ידוע סביב $x_0$ וקיים $g(x)$ גזיר אינסוף פעמים ב$x_0$ וכאשר $x \to x_0$ גם $g(x) \to x_0$ אזי הטור עבור $f\left(g\left(x\right)\right)$ סביב $x_0$ הינו:

$$f\left(g\left(x\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(g\left(x_0\right)\right)}{n!} \left(g(x) - x_0\right)^n$$

השימוש במשפט הזה מועיל כאשר יש לנו ביטוי שמכיל פונקציה ואז ניתן לפתח אותו לטור כאשר הפונקציה היא הנעלם ואז לפתח את הפונקציה עצמה לטור של $x$ ולקחת עד הסדר הרלוונטי מבחינתנו.

## תרגיל 3

חשבו בעזרת טור טיילור את הביטוי הבא עד סדר שני ב $x$ והעריכו את השארית שלו עבור $|x| < 0.001$

$$\sqrt{1 + 2\sin\left(x\right)}$$

## פתרון

נחשב את הביטוי עד סדר שני על פי הנוסחא לפונקציה מורכבת

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(g(x_0)\right)}{n!} \left(g\left(x\right) - x_0\right)^n$$

$$g\left(x\right) = 2\sin\left(x\right)$$

$$\sqrt{1 + g\left(x\right)} \approx 1 + \frac{g\left(x\right)}{2\sqrt{1 + g\left(0\right)}} - \frac{g^2\left(x\right)}{8\left(1 + g\left(0\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \sin\left(x\right) - \frac{\sin^2\left(x\right)}{2}$$

טור טיילור של $\sin\left(x\right)$ הוא:

$$\sin\left(x\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}...$$

נציב:

$$\sqrt{1 + 2\sin\left(x\right)} \approx 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + ...\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + ...\right)^2}{2}$$

ניקח רק עד סדר שני

$$\sqrt{1+2\sin(x)} \approx 1+x-\frac{x^2}{2}$$

הנוסחא לחישוב השארית תהיה:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(g(x)-x_0)^{n+1}$$

$$R_2(x)=\frac{3}{8(1+c)^{\frac{5}{2}}\,3!}(2\sin(x))^3=\frac{\sin^3(x)}{2(1+c)^{\frac{5}{2}}}<\frac{\sin^3(x)}{2}<\frac{x^3}{2}<\frac{10^{-9}}{2}=5\cdot 10^{-10}$$

$$0\le c\le 0.001$$

## אינטגרלים

נסמן את האינטגרל של $f(x)$:

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

ישנם שתי הגדרות לאינטגרל:

1. האינטגרל הלא מסויים הוא הפעולה ההפוכה לנגזרת, כלומר אם נגזור את $F(x)$ נקבל בחזרה את $f(x)$

$$F'(x)=f(x)$$

הפונקציה $F(x)$ נקראת הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

2. האינטגרל המסויים ־ ניתן לשייך לאינטגרל המסויים משמעות של שטח, אם $f(x)\ge 0$ בתחום $a\le x\le b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx=S$$

האינגטגרל הוא השטח הכלוא בין הפונקציה לציר ה־ $x$.
המשפט היסודי של החדו"א מאחד בין שתי ההגדרות:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

### שיטת ההצבה

עבור האינטגרל:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\left\{\begin{array}{c} g(x)=u \\ g'(x)=\frac{du}{dx}\end{array}\right\}=\int f(u)\,du$$

## תרגיל 4

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

## פתרון

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$$
$$\{u = \cos x, \quad du = -\sin x dx\}$$
$$= -\int \frac{1}{1-u^2} du = -\int \frac{1}{(1+u)(1-u)} du = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right] du$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C = \ln \left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

### הצבה אוניברסלית:

ההצבה האוניברסלית עוזרת לנו עבור אינטגרלים המכילים פונקציות טריגונומטריות במידה ואנחנו לא מוצאים זהות טובה יותר:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

### דוגמא

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2t}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2t}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

## תרגיל 5

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3} dx$$

### פתרון

נפתור בעזרת ההצבה האוניברסלית:

$$\int \frac{1}{\cos x+2\sin x+3}dx \to \int \frac{2dt}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3\right)(1+t^2)}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+2t+2}=\int \frac{dt}{(t+1)^2+1}=\left\{\begin{array}{c} u=t+1 \\ du=dt \end{array}\right\}=\int \frac{du}{u^2+1}=$$

$$=\arctan(u)+C=\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+C$$

### אינטגרציה בחלקים

שיטת אינטגרציה לחישוב אינטגרלים מהסוג

$$\int f(x)g'(x)dx$$

השיטה שימושית כאשר $f$ ניתנת לגזירה חוזרת ו $g$ ניתנת לאינטגרציה חוזרת ללא קושי. לדוגמא, $\int x\cos x dx$ ו $\int x^2e^x dx$. את $f(x)=x,\ x^2$ ניתן לגזור עד שמקבלים קבוע והאינטגרל של $g(x)=\cos x,\ e^x$ ניתן לחישוב בקלות.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx &= \int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]\,dx= \\ &= \int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

נעביר אגפים

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x)dx &= \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx-\int f(x)g'(x)dx \\ \int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

נוסחא קלה יותר לזכרון, נסמן $u=f(x)$ ו $v=g(x)$, אז $dv=g'(x)dx$,$du=f'(x)dx$ ו

$$\int udv=uv-\int vdu$$

### תרגיל 6

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \ln(x)\,dx$$

**פתרון**

$$\begin{aligned}
&\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx \\
&\left\{\begin{array}{ll} u & = \ln(x)\,, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv & = dx, \quad v = x \end{array}\right\} \\
&= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C
\end{aligned}$$

**פירוק לשברים חלקיים**

כאשר יש לנו פולינום במכנה אנחנו רוצים לחלק אותו לכמה איברים שבכל אחד יש רק חזקה אחת של $x$, כך שנוכל לחשב את האינטגרל של כל שבר בנפרד, בשביל זה נעבוד בכמה שלבים:
אלגוריתם לחישוב $\int P_n(x)/Q_m(x)$

1. אם $n > m$, יש לחלק כך

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

כך ש $\deg[R] < \deg[Q]$, לדוגמא

$$\frac{x^3-3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x-3}{x^2-1} = x + \frac{x-3}{x^2-1}$$

2. לכתוב את $Q(x)$ כמכפלת גורמים ראשוניים, לדוגמא

$$Q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 25x = x(x^2+5)(2x+5)$$

3. לכתוב את הביטוי כסכום של שברים חלקיים שבכל אחד מהם המכנה הוא אחד הגורמיים הראשוניים של השבר והמונה שלו הוא מדרגה אחת פחות מאשר המכנה

$$\frac{1}{x\left(x^2+5\right)\left(2x+5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{D}{2x+5}$$

אם יש שורש מסדר $l$, נרשום סכום של $l$ שברים

$$\frac{3x+5}{(2x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2}$$

4. את המונים ניתן למצוא על ידי הכפלה של המונים במכנים האחרים

5.

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{D}{2x+5} = \frac{A\left(x^2+5\right)(2x+5) + x\left(Bx+C\right)(2x+5) + x\left(x^2+5\right)D}{x\left(x^2+5\right)(2x+5)} =$$

$$\rightarrow A\left(2x^3+5x^2+10x+25\right) + B\left(2x^3+5x^2\right) + C\left(2x^2+5x\right) + D\left(x^3+5x\right) = 1$$

$$\begin{array}{ll} x^0: & 25A = 1 \\ x^1: & 10A + 5C + 5D = 0 \\ x^2: & 5A + 5B + 2C = 0 \\ x^3: & 2A + 2B + D = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A = \frac{1}{25} \\ C = -\frac{2}{45} \\ B = -\frac{1}{45} \\ D = -\frac{8}{225} \end{array}$$

$$\frac{1}{x(x^2+5)(2x+5)} = \frac{1}{25x} - \frac{x+2}{45\left(x^2+5\right)} - \frac{8}{225\left(2x+5\right)}$$

שיטת $Heaviside$ - שיטה נוספת למציאת המונים היא להכפיל את שני הצדדים באחד המכנים ואז להציב את מה שמאפס אותו

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x\left(x^2+5\right)\left(2x+5\right)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{D}{2x+5} \\
\left.\frac{1}{\left(x^2+5\right)\left(2x+5\right)}\right|_{x=0} &= \left. A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+5} + \frac{Dx}{2x+5}\right|_{x=0} \\
&\Rightarrow \quad A = \frac{1}{\left(0+5\right)\left(0+5\right)} = \frac{1}{25} \\
\left.\frac{1}{x\left(x^2+5\right)}\right|_{x=-\frac{5}{2}} &= \left.\frac{A\left(2x+5\right)}{x} + \frac{\left(Bx+C\right)\left(2x+5\right)}{x^2+5} + D\right|_{x=-\frac{5}{2}} \\
&\Rightarrow \quad D = \frac{1}{-\frac{5}{2}\left(\frac{25}{4}+5\right)} = -\frac{8}{225} \\
\left.\frac{1}{x\left(2x+5\right)}\right|_{x=\pm i\sqrt{5}} &= \left.\frac{A\left(x^2+5\right)}{x} + Bx + C + \frac{D\left(x^2+5\right)}{2x+5}\right|_{x=\pm i\sqrt{5}} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} i\sqrt{5}B + C & = -\frac{1}{10-i5\sqrt{5}} \\ -i\sqrt{5}B + C & = -\frac{1}{10+i5\sqrt{5}} \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} C & = -\frac{2}{45} \\ B & = -\frac{1}{45} \end{cases}
\end{aligned}$$

לאחר שהבאנו את הפונקציה לצורה הפשוטה ביותר, נחשב את האינטגרל. בד"כ נצטרך את אחד האינטגרלים הבאים

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{2}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{3}$$

### תרגיל 7

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

**פתרון**

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \\
&\left\{u = x^2+a^2, \quad du = 2xdx\right\} \\
&\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{1/2}}du = u^{1/2}+C = \sqrt{a^2+x^2}+C
\end{aligned}
$$

**תרגיל 8**

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx$$

**פתרון**

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx \\
&\left\{u = x^2+a^2, \quad du = 2xdx\right\} \\
&\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{3/2}}du = -u^{-1/2}+C = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C
\end{aligned}
$$

**תרגיל 9**

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

**פתרון**

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \\
&\left\{\frac{x}{a} = \sinh u, \quad dx = a\cosh u\right\} \\
&\frac{1}{a}\int \frac{a\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}du = \int du = u+C = \sinh^{-1}\frac{x}{a}+C = \\
&\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

## תרגיל 10

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx$$

## פתרון

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{3/2}}dx$$

$$\left\{\frac{x}{a} = \sinh u, \quad dx = a\cosh u\right\}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{a\cosh u}{\cosh^3 u}du = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2 u}du = \frac{\tanh u}{a^2} + C$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\sinh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$