# פונקציות רבות־משתנים

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ב, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

## פונקציות בשני משתנים

נסמן פונקציה שתלויה בשני משתנים $f(x,y)$ או $f(\vec{r})$ כאשר $\vec{r}=(x,y)$.

$x$ ו־$y$ יכולים להיות קואורדינטות במרחב הפיזיקלי, אבל לא חייבים. לדוגמה, יכול להיות ש־$x$ הוא טמפרטורה ו־$y$ הוא לחץ, והפונקציה $f(x,y)$ מחזירה את הצפיפות של גז מסוים עבור טמפרטורה ולחץ נתונים. אבל גם במקרים כאלה, יהיה לנו לפעמים נוח לחשוב על $x$ ו־$y$ כקואורדינטות במרחב.

### נגזרות חלקיות

נגדיר **נגזרות חלקיות:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\,y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{2}$$

שימו לב שכשגוזרים לפי $x$ מחזיקים את $y$ קבוע, וכשגוזרים לפי $y$ מחזיקים את $x$ קבוע.

**דוגמה:** נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=x^2-xy+y^3 \tag{3}$$

נמצא את כל הנגזרות החלקיות של הפונקציה עד סדר שני:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-x+3y^2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=6y,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-1 \tag{6}$$

בפרט, הנגזרות המעורבות יוצאות שוות – זה אינו מקרה:

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

**משפט:**[1]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{7}$$

**סימונים מקוצרים:**

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \partial_x \partial_y f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{8}$$

## הדיפרנציאל בשני משתנים

ניתן לרשום את השינוי $\Delta f$ בפונקציה $f(x,y)$ כאשר עושים שינוי קטן ב־$x$ ו־$y$ כך:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\,\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\,\Delta y \\
&\simeq \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\Delta y \\
&\simeq \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\Delta y
\end{aligned} \tag{9}$$

בגבול $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ נגדיר את ה**דיפרנציאל**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \tag{10}$$

זה דומה למה שאנחנו כבר מכירים עבור פונקציה של משתנה אחד, $f(x)$, ששם

$$df = \frac{df}{dx}\,dx \tag{11}$$

במקרים מסוימים המשתנים $x$ ו־$y$ יהיו פונקציות של משתנה כלשהו $t$:

$$x = x(t) \tag{12}$$

$$y = y(t) \tag{13}$$

ואז $dx$ ו־$dy$ יהיו נתונים על ידי

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt \tag{14}$$

$$dy = \frac{dy}{dt}\,dt \tag{15}$$

[1] המשפט תקף בתנאי שהפונקציה, הנגזרות החלקיות הראשונות שלה, והנגזרות המופיעות במשפט, רציפות בנקודה הנתונה. ההוכחה של משפט זה, המכונה משפט אוילר, קצת מסובכת. ניתן למצוא אותה למשל בנספח A.9 של הספר הבא, המוזכר באתר הקורס:
Calculus and Analytic Geometry, G. B. Thomas, R. L. Finney

נציב זאת במשוואה (10) ונקבל

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}\,dt + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}\,dt \tag{16}$$

מכאן נוכל לרשום את הביטוי ל**נגזרת המלאה** של $f(x(t), y(t))$ לפי $t$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} \tag{17}$$

**דוגמה:** עבור

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x(t) = t^2, \quad y(t) = t \tag{18}$$

נקבל

$$\frac{df}{dt} = 2x \cdot 2t + 2y \cdot 1 = 4t^3 + 2t \tag{19}$$

זאת גם התוצאה שהיינו מקבלים ע"י הצבת $x(t)$ ו־$y(t)$ ב־$f(x, y)$ וגזירה לפי $t$:

$$f(t) = \left(t^2\right)^2 + t^2 = t^4 + t^2 \tag{20}$$

$$\frac{df}{dt} = 4t^3 + 2t \tag{21}$$

אפשרות נוספת היא שאחד המשתנים הוא פונקציה של משתנה אחר, למשל $f(t, x(t))$. במקרה כזה

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} \tag{22}$$

ישנם גם מצבים בהם $x$ ו־$y$ ב־$f(x, y)$ הם פונקציות של שניים או יותר משתנים אחרים:

$$x = x(u, v, \ldots) \tag{23}$$

$$y = y(u, v, \ldots) \tag{24}$$

במקרה כזה נקבל

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \tag{25}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \ldots\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv + \ldots\right) \tag{26}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv + \ldots \tag{27}$$

ומכאן את הנגזרות החלקיות (במקום הנגזרת המלאה של המקרה הקודם)

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{28}$$

## הגרדיאנט בשני משתנים

ניתן לרשום את שני המשתנים ב־$f(x,y)$ כווקטור

$$\vec{r} = (x, y) \tag{29}$$

ואז

$$\Delta\vec{r} = (x + \Delta x,\, y + \Delta y) - (x,\, y) = (\Delta x,\, \Delta y) \tag{30}$$

$$d\vec{r} = (dx,\, dy) \tag{31}$$

נגדיר גם את סימן ה**נבלה (nabla)** $\vec{\nabla}$ כאופרטור וקטורי שרכיביו הם הנגזרות החלקיות:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} \tag{32}$$

כשמפעילים אותו על פונקציה $f$ מקבלים את ה**גרדיאנט (gradient)** של הפונקציה

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,,\, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} \tag{33}$$

באמצעותו נוכל לרשום את הדיפרנציאל ממשוואה (10) כ־

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} \tag{34}$$

ואת הביטוי עבור הנגזרת המלאה, משוואה (17), כ־

$$\frac{df}{dt} = \vec{\nabla}f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{35}$$

ניתן גם להגדיר את המושג **נגזרת כיוונית** $D_{\hat{a}}f$ כקצב שינוי הפונקציה בכיוון וקטור יחידה נתון $\hat{a}$. לשם כך ניקח $d\vec{r} = \hat{a}\,dt$ ונקבל

$$D_{\hat{a}}f = \frac{df}{dt} = \vec{\nabla}f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\nabla}f \cdot \hat{a} \tag{36}$$

ניתן לרשום זאת גם כ־

$$D_{\hat{a}}f = \left|\vec{\nabla}f\right| \cos\theta \tag{37}$$

כאשר $\theta$ היא הזווית בין $\vec{\nabla}f$ ל־$\hat{a}$. אנחנו רואים שהפונקציה גדלה הכי מהר אם אנחנו הולכים בכיוון הגרדיאנט ($\theta = 0$), וקטנה הכי מהר אם הולכים בכיוון הנגדי ($\theta = \pi$).

## תיאור גאומטרי של פונקציות בשני משתנים

ניתן לעשות החזיה ("ויזואליזציה") של פונקציה ע"י הגדרת **גרף הפונקציה**

$$z = f(x, y) \tag{38}$$

זהו משטח דו־מימדי במרחב תלת־מימדי, המוגדר כאוסף כל הנקודות

$$(x, y, f(x, y)) \tag{39}$$

ניתן לתאר את הפונקציה גם בדו־מימד ע"י שימוש בקווי גובה. **קווי גובה** הם קווים עבורם הפונקציה מקבלת ערך קבוע, כלומר אוסף הנקודות $(x, y)$ המקיימות

$$f(x, y) = z_0 \tag{40}$$

עבור $z_0$ קבוע לכל קו גובה. נשים לב שכל קו גובה ניתן על ידי חיתוך של גרף הפונקציה עם מישור שמאונך לציר $z$ בתמונה התלת־מימדית. ניתן לראות דוגמאות לתיאור התלת־מימדי והדו־מימדי של פונקציות בשני משתנים באיור 1.

**משפט:** הגרדיאנט בנקודה ניצב למשיק לקו הגובה העובר דרך הנקודה.
**הוכחה:** ניזכר ש־

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \tag{41}$$

נשים לב שאם ניקח $d\vec{r}$ המכוון במקביל לקו הגובה אנו אמורים לקבל $df = 0$ (כי ערך הפונקציה אינו משתנה לאורך קו הגובה). לכן חייב להיות ש־$\vec{\nabla} f$ מאונך ל־ $d\vec{r}$ כזה ולכן מאונך גם למשיק לקו הגובה.

## הקירוב הליניארי לפונקציה בשני משתנים

למדנו שעבור פונקציה של משתנה אחד הקירוב הליניארי הוא הישר המשיק לגרף הפונקציה. באופן דומה, עבור פונקציה של שני משתנים הקירוב הליניארי הוא **המישור המשיק** לגרף (התלת־מימדי) של הפונקציה. נמצא את המשוואה של מישור זה. ניזכר שכאשר עוברים מנקודה $(x_0, y_0)$ לנקודה קרובה $(x, y)$, השינוי בפונקציה הוא

$$\Delta f \simeq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y \tag{42}$$

לכן המישור המשיק לגרף הפונקציה מתואר ע"י המשוואה

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) \tag{43}$$

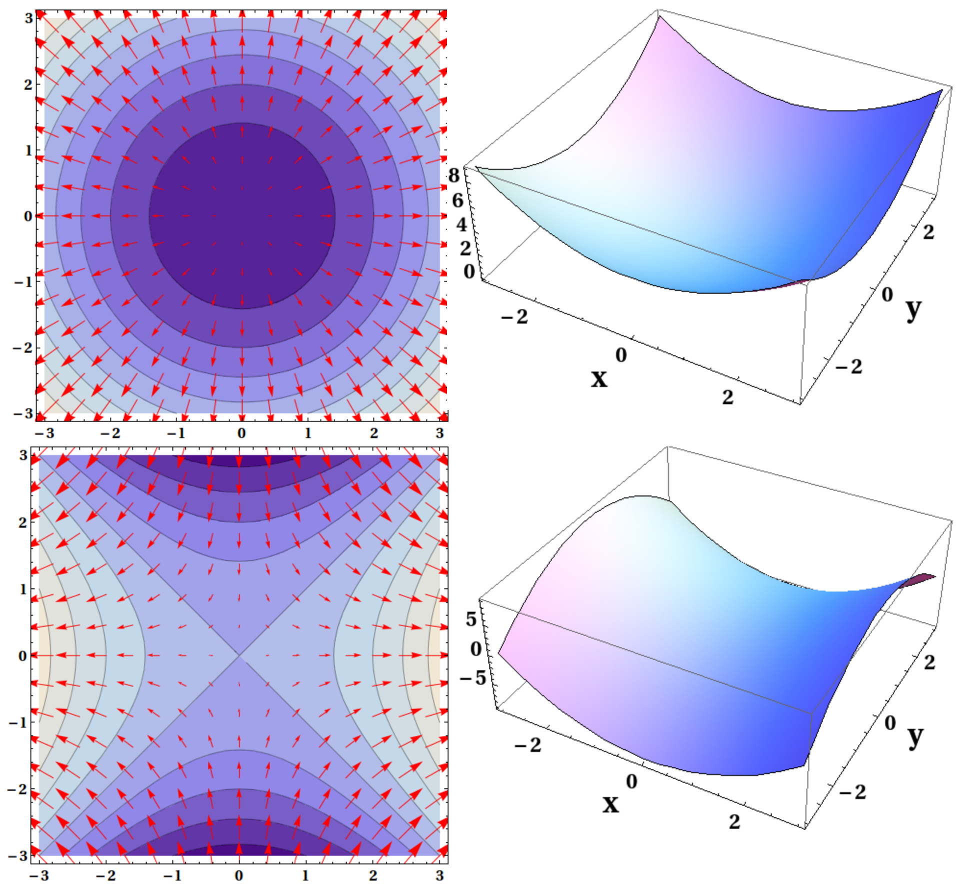
כאשר $z_0 = f(x_0, y_0)$.

**דוגמה:** ניקח את הפונקציה

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{44}$$

גרף הפונקציה הוא ההמיספירה

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad z \geq 0 \tag{45}$$




איור 1: דוגמאות לפונקציות בשני משתנים, $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (למעלה) ו־$g(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ (למטה): גרף הפונקציה, קווי גובה, וכיווני וקטור הגרדיאנט בכל נקודה.

נחפש את המישור המשיק בנקודה $(0,0,1)$:

$$z-1=\left.\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right|_{(0,0)}(x-0)+\left.\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right|_{(0,0)}(y-0) \tag{46}$$

אז מקבלים, כצפוי, את המישור

$$z=1 \tag{47}$$

בואו נמצא גם את המישור המשיק בנקודה כללית $(a,b,\sqrt{1-a^2-b^2})$:

$$z-\sqrt{1-a^2-b^2}=\left.\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right|_{(a,b)}(x-a)+\left.\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right|_{(a,b)}(y-b) \tag{48}$$

אז מקבלים את המישור

$$a\,x+b\,y+\sqrt{1-a^2-b^2}\,z=1 \tag{49}$$

## טור טיילור בשני משתנים

נרצה לפתח פונקציה $f(x,y)$ בטור טיילור סביב נקודה $(x_0,y_0)$:

$$f(x,y)=f(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{mn}\,(\Delta x)^m(\Delta y)^n \tag{50}$$

כאשר סימנו $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, ו־$c_{mn}$ הם מקדמים מספריים. זה דומה למה שהיה לנו עבור פונקציה של משתנה אחד: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(\Delta x)^n$. את התשובה ניתן לרשום בצורה קומפקטית כך:

$$\begin{aligned}f(\vec{r}_0+\Delta\vec{r})=f(\vec{r}_0)+\left(\Delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)f(\vec{r}_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^2f(\vec{r}_0)+\dots\\+\frac{1}{n!}\left(\Delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^nf(\vec{r}_0)+\dots\end{aligned} \tag{51}$$

כאשר לדוגמה

$$\left(\Delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^2f=\left(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f \tag{52}$$

$$=(\Delta x)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta x\Delta y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\Delta y)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{53}$$

מה שנותן

$$c_{20}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\quad c_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,,\quad c_{02}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{54}$$

שלושת המקדמים האלה הם האנלוג של $c_2=\frac{1}{2}f''$ שהיה לנו במקרה של משתנה אחד.

נבדוק את הנוסחה לטור טיילור, משוואה $(51)$, עד סדר שני. ראשית נפתח את הביטוי $f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)$ ב־$\Delta x$ עד סדר שני – אנחנו מתייחסים לפונקציה $f(x,y)$ כפונקציה של $x$ בלבד ומתייחסים ל־$y$ בתור קבוע, כך שנוכל להשתמש בטור טיילור של משתנה אחד:

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y) &= f(x_0,\, y_0+\Delta y) + \Delta x\,\partial_x f(x_0,\, y_0+\Delta y) \\ &+ \frac{1}{2!}\,(\Delta x)^2\,\partial_x^2 f(x_0,\, y_0+\Delta y) + \ldots \end{aligned} \tag{55}$$

כעת נפתח כל אחד משלושת האיברים שקיבלנו במשוואה $(55)$ ב־$\Delta y$, והפעם נתייחס ל־$x$ בתור קבוע, ושוב נשמור איברים עד סדר שני בלבד מבחינת חזקות של $\Delta x$ או $\Delta y$:

$$f(x_0,\, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \Delta y\,\partial_y f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\,(\Delta y)^2\,\partial_y^2 f(x_0,y_0) + \ldots \tag{56}$$

$$\Delta x\,\partial_x f(x_0,\, y_0+\Delta y) = \Delta x\,\partial_x f(x_0,y_0) + \Delta x\Delta y\,\partial_x\partial_y f(x_0,y_0) + \ldots \tag{57}$$

$$\frac{1}{2!}\,(\Delta x)^2\,\partial_x^2 f(x_0,\, y_0+\Delta y) = \frac{1}{2!}\,(\Delta x)^2\,\partial_x^2 f(x_0,y_0) + \ldots \tag{58}$$

נחבר ונקבל:

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y) &= f(x_0,y_0) + (\Delta x\,\partial_x + \Delta y\,\partial_y) f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}(\Delta x\,\partial_x + \Delta y\,\partial_y)^2 f(x_0,y_0) + \ldots \end{aligned} \tag{59}$$

בהתאמה עם משוואה $(51)$.

**דוגמה:** נפתח את הפונקציה

$$f(x,y) = e^{xy} \tag{60}$$

בטור טיילור סביב הנקודה $(x_0,y_0) = (0,0)$ עד סדר שני. עלינו לחשב

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \partial_x f(0,0)\,x + \partial_y f(0,0)\,y \\ &+ \frac{1}{2}\partial_x^2 f(0,0)\,x^2 + \partial_x\partial_y f(0,0)\,xy + \frac{1}{2}\partial_y^2 f(0,0)\,y^2 + \ldots \end{aligned} \tag{61}$$

הנגזרות הן

$$\partial_x f(x,y) = y\,e^{xy}, \qquad \partial_y f(x,y) = x\,e^{xy} \tag{62}$$

$$\partial_x^2 f(x,y) = y^2 e^{xy}, \quad \partial_y^2 f(x,y) = x^2\,e^{xy}, \quad \partial_x\partial_y f(x,y) = (1+xy)\,e^{xy} \tag{63}$$

כל הנגזרות פרט ל־$\partial_x\partial_y f$ מתאפסות ב־$(0,0)$ ואנחנו מקבלים

$$f(x,y) = 1 + xy + \ldots \tag{64}$$

יכולנו לקבל תוצאה זו גם ע"י שימוש בטור טיילור של $e^t$ סביב $t=0$ כאשר $t \equiv xy$.

### נקודות מינימום, מקסימום ואוכף

ניזכר שעבור פונקציה של משתנה אחד, $f(x)$, ניתן למצוא נקודות קיצון באופן הבא:

1. נחפש נקודות חשודות $x_0$, שעבורן מתקיים $f'(x_0) = 0$.
2. אם $f''(x_0) > 0$, זוהי **נקודת מינימום**. אם $f''(x_0) < 0$, זוהי **נקודת מקסימום**. ואם $f''(x_0) = 0$, יש לגזור הלאה כדי לדעת האם זו נקודת מינימום, מקסימום או פיתול.
3. לבסוף נבדוק אילו ערכים הפונקציה מקבלת בקצות תחום ההגדרה שלה.

באופן דומה, עבור פונקציה של שני משתנים, $f(x, y)$, האלגוריתם (אותו נוכיח עוד מעט) הוא:

1. נחפש נקודות חשודות $(x_0, y_0)$, שעבורן מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \tag{65}$$

ניתן לרשום אותם גם בצורה וקטורית כ־

$$\left.\vec{\nabla} f\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \tag{66}$$

מהיכרותנו עם הנגזרת הכיוונית, זה מבטיח שהנגזרת בכל כיוון היא אפס.

2. נגדיר את הדטרמיננטה של הנגזרות השניות

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \tag{67}$$

ונעריך אותה לכל נקודה חשודה.

(א) אם $D(x_0, y_0) > 0$, אזי נבחר את $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ או את $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ כרצוננו. נניח שבחרנו את $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

i. אם $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0$ זוהי **נקודת מינימום**.

ii. אם $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} < 0$ זוהי **נקודת מקסימום**.

(ב) אם $D(x_0, y_0) < 0$ זוהי **נקודת אוכף**. בנקודה כזאת, כשהולכים בכיוון מסוים במישור $xy$ (למשל לאורך ציר ה־$x$) הנקודה היא מינימום, בעוד שבכיוון אחר (למשל לאורך ציר ה־$y$) הנקודה היא מקסימום.

(ג) אם $D(x_0, y_0) = 0$ נצטרך לגזור הלאה. (לא נדון במקרה זה.)

3. לבסוף נבדוק אילו ערכים הפונקציה מקבלת לאורך גבולות תחום ההגדרה שלה.

**דוגמאות:**

1. הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{68}$$

כאשר נתון שהיא מוגדרת בתוך העיגול $x^2+y^2\leq 2$.

הנגזרות הראשונות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=y \tag{69}$$

הנקודה החשודה היחידה היא לכן $(x_0,y_0)=(0,0)$.

הנגזרות השניות:

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \tag{70}$$

בנקודה החשודה $D(0,0)>0$ וגם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)>0$, לכן זוהי נקודת מינימום.

לבסוף, נבדוק את השפה: על שפת העיגול ערך הפונקציה ($=1$) קבוע לאורך השפה וגדול מהערכים בקרבת השפה, לכן זהו מקסימום.

2. הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2) \tag{71}$$

הנגזרות הראשונות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-y \tag{72}$$

הנקודה החשודה היחידה היא שוב $(x_0,y_0)=(0,0)$.

הנגזרות השניות:

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1 \tag{73}$$

לכן זוהי נקודת אוכף.

## נקודות מינימום, מקסימום ואוכף - הוכחה

נסתכל על הסדר השני בפיתוח טיילור של פונקציה עם שני משתנים, מסביב לנקודה חשודה $(x_0, y_0)$, עבורה $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$,

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \simeq \frac{1}{2}\left[(\partial_x^2 f)(\Delta x)^2 + 2(\partial_x \partial_y f)\Delta x \Delta y + (\partial_y^2 f)(\Delta y)^2\right] \tag{74}$$

זוהי תבנית ריבועית. השאלה היא האם היא מקבלת ערכים חיוביים בלבד (כפונקציה של $\Delta x$ ו־$\Delta y$)? ערכים שליליים בלבד? או גם וגם? נחקור אם כן את התבנית

$$A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x \Delta y + C(\Delta y)^2 \tag{75}$$

נסמן $t = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, $D = AC - B^2$, $P = \frac{B}{A}$ (ושתי הנחות סמויות: $\Delta y \neq 0$, $A \neq 0$):

$$A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x \Delta y + C(\Delta y)^2 = A(\Delta y)^2\left(t^2 + 2\frac{B}{A}t + \frac{C}{A}\right) \tag{76}$$

$$= A(\Delta y)^2\left[\left(t + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A}\right] \tag{77}$$

$$= A(\Delta y)^2\left[(t+P)^2 + \frac{D}{A^2}\right] \tag{78}$$

אם $\underline{D > 0}$ אז הביטוי בסוגריים המרובעים חיובי, ולכן:

1. אם $A > 0$ התבנית מקבלת רק ערכים חיוביים ולכן זוהי **נקודת מינימום** (כל נקודה $(x,y)$ בסביבת $(x_0,y_0)$ מקיימת $f(x,y) > f(x_0,y_0)$).
2. אם $A < 0$ התבנית מקבלת רק ערכים שליליים ולכן זוהי **נקודת מקסימום** (כל נקודה $(x,y)$ בסביבת $(x_0,y_0)$ מקיימת $f(x,y) < f(x_0,y_0)$).

אם $\underline{D < 0}$, נעריך את הביטוי בסוגריים המרובעים עבור שני ערכים של $t$ (פרמטר זה מתאר את הכיוון שבו אנו זזים במישור $xy$).
עבור $t = -P$ מקבלים:

$$[...] = \frac{D}{A^2} < 0 \tag{79}$$

בעוד שעבור $t = \frac{\sqrt{2|D|}}{A} - P$ מקבלים

$$[...] = \frac{|D|}{A^2} > 0 \tag{80}$$

זה אומר שהתבנית מקבלת גם ערכים חיוביים וגם ערכים שליליים בסביבת הנקודה $(x_0,y_0)$, לכן זו **נקודת אוכף**.
במקרה הנותר, $\underline{D = 0}$, הביטוי כולו מתאפס עבור $t = -P$. זה אומר שאם זזים בכיוון המתואר ע"י ערך זה של $t$ איננו יכולים לדעת האם ערך הפונקציה גדל או קטן בלי לחשב סדרים גבוהים יותר בטור טיילור.
נשים לב ש־$D$ הוא הדטרמיננטה ממשוואה (67),[2] לכן הוכחנו את האלגוריתם שהוצג לעיל.

[2] הופעתה של דטרמיננטה אינה מקרית. היא מופיעה בצורה טבעית יותר כאשר מנסחים את ההוכחה בשפה של מטריצות, כפי שהמעוניינים מביניכם יכולים למצוא בפרק 5.8 של הספר הבא שקישור אליו נמצא באתר הקורס:
Mathematical Methods for Physics and Engineering, K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence.

## פונקציות בשלושה משתנים

נסמן פונקציה בשלושה משתנים $f(x,y,z)$ או $f(\vec{r})$ כאשר $\vec{r}=(x,y,z)$. הנגזרות החלקיות מוגדרות באופן דומה למה שלמדנו עבור פונקציות של שני משתנים, לדוגמה

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y} \tag{81}$$

וכך גם עבור פונקציות עם מספר רב יותר של משתנים. **הגרדיאנט התלת־מימדי** מוגדר כווקטור הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \tag{82}$$

נגדיר **משטחי רמה (level surfaces)** באופן אנלוגי לקווי הגובה: אלה משטחים דו־מימדיים המקיימים

$$f(x,y,z)=w_0 \tag{83}$$

עבור $w_0$ קבוע לכל משטח רמה. בהינתן נקודה $(x_0,y_0,z_0)$ נחשב את $w_0=f(x_0,y_0,z_0)$ ונבנה את משטח הרמה שעובר דרכה לפי משוואה (83). נוכל להתייחס למשוואת משטח הרמה כמגדירה אובייקט גיאומטרי באופן סתום:

$$f(x,y,z(x,y))=w_0 \tag{84}$$

משוואה זו מגדירה משטח דו־מימדי $z(x,y)$.
לפעמים צורת משטח הרמה היא כזאת שהמשטח עובר מספר פעמים באותן קואורדינטות $x,y$ אבל עם $z$ שונה, ואז הפונקציה $z(x,y)$ אינה חד־ערכית. במקרים כאלה ניתן לחלק את המשטח למספר חלקים ולתאר כל אחד מהם בנפרד ו/או לתאר את המשטח באופן שונה, למשל כ־$y(x,z)$.

נוכל לקבל את **המישור המשיק למשטח הרמה** בנקודה $(x_0,y_0,z_0)$ כקירוב הליניארי לפונקציה $z(x,y)$:

$$z-z_0=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) \tag{85}$$

כדי למצוא את הנגזרות החלקיות המופיעות כאן, נגזור את משוואה (84) לפי $x$ ולפי $y$ ונקבל

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{86}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{87}$$

ולכן

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \tag{88}$$

נציב זאת במשוואה (85) ונקבל את הביטוי למשוואת המישור המשיק:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0 \quad (89)$$

נשים לב שניתן לרשום זאת גם כ־

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \quad (90)$$

כלומר המישור המשיק למשטח הרמה בנקודה ניצב לווקטור הגרדיאנט התלת־מימדי. (זה אנלוגי לכך שהמשיק לקו הגובה במקרה הדו־מימדי ניצב לגרדיאנט הדו־מימדי.)

**דוגמה:** ניקח את הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$. הגרדיאנט הוא

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\,\frac{\partial f}{\partial y},\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(x,y,z) \quad (91)$$

נסתכל על משטח הרמה $f(x,y,z)=\frac{1}{2}$. משטח זה הוא שפה של כדור שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 1. המישור המשיק למשטח הרמה בנקודה כלשהי $(x_0,y_0,z_0)$ (המקיימת את משוואת משטח הרמה $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$) הוא

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0 \quad (92)$$

לדוגמה, בנקודה $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,1)$ נקבל על ידי הצבה שהמישור המשיק הוא

$$z=1 \quad (93)$$

הגרדיאנט באותה נקודה

$$\vec{\nabla} f(0,0,1)=(0,0,1) \quad (94)$$

מצביע בכיוון $\hat{z}$, שאכן מאונך למישור המשיק.