

מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 4

אינטגרלים - המשך

הצבה אוניברסלית:

ההצבה האוניברסלית עוזרת לנו עבור אינטגרלים המכילים פונקציות טריגונומטריות במידה ואנחנו לא מוצאים זהות טובה יותר:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2t}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2t}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

תרגיל 1

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx$$

פתרון

נפתור בעזרת ההצבה האוניברסלית:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx &\rightarrow \int \frac{2dt}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3\right)(1+t^2)} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} u = t+1 \\ du = dt \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \\ &= \arctan(u) + C = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + C \end{aligned}$$

אינטגרציה בחלקים

שיטת אינטגרציה לחישוב אינטגרלים מהסוג

$$\int f(x)g'(x)dx$$

השיטה שימושית כאשר f ניתנת לגזירה חוזרת ו g ניתנת לאינטגרציה חוזרת ללא קושי. לדוגמא, $\int x \cos x dx$ ו $\int x^2 e^x dx$. את $f(x) = x, x^2$ ניתן לגזור עד שמקבלים קבוע והאינטגרל של $e^x, \cos x$ ניתן לחישוב בקלות.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx &= \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx = \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

נעביר אגפים

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)dx &= \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int f(x)g'(x)dx \\ \int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

נוסחא קלה יותר לזכרון, נסמן $u = f(x)$ ו $v = g(x)$ אז $du = f'(x)dx, dv = g'(x)dx$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

תרגיל 2

פתור את האינטגרל הבא:

$$\int \ln(x) dx$$

פתרון

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \\ \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x), \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\} \\ &= x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקיים

כאשר יש לנו פולינום במכנה אנחנו רוצים לחלק אותו לכמה איברים שבכל אחד יש רק חזקה אחת של x , כך שנוכל לחשב את האינטגרל של כל שבר בנפרד, בשביל זה נעבוד בכמה שלבים:

$$\int P_n(x)/Q_m(x)$$

1. אם $n > m$, יש לחלק כך

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

כך ש $\deg[R] < \deg[Q]$ לדוגמה

$$\frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x - 3}{x^2 - 1} = x + \frac{x - 3}{x^2 - 1}$$

2. לכתוב את $Q(x)$ כמכפלת גורמים ראשוניים, לדוגמה

$$Q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 25x = x(x^2 + 5)(2x + 5)$$

3. לכתוב את הביטוי כסכום של שברים חלקיים שבכל אחד מהם המכנה הוא אחד הגורמים הראשוניים של השבר והמונה שלו הוא מדרגה אחת פחות מאשר המכנה

$$\frac{1}{x(x^2 + 5)(2x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5} + \frac{D}{2x + 5}$$

אם יש שורש מסדר l , נרשום סכום של l שברים

$$\frac{3x + 5}{(2x - 1)^2} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{(2x - 1)^2}$$

4. את המונים ניתן למצוא על ידי הכפלה של המונים במכנים האחרים

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5} + \frac{D}{2x + 5} = \frac{A(x^2 + 5)(2x + 5) + x(Bx + C)(2x + 5) + x(x^2 + 5)D}{x(x^2 + 5)(2x + 5)}$$

$$\rightarrow A(2x^3 + 5x^2 + 10x + 25) + B(2x^3 + 5x^2) + C(2x^2 + 5x) + D(x^3 + 5x) = 1$$

$$\begin{aligned} x^0: & \quad 25A = 1 \\ x^1: & \quad 10A + 5C + 5D = 0 \\ x^2: & \quad 5A + 5B + 2C = 0 \\ x^3: & \quad 2A + 2B + D = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{25} \\ C &= -\frac{2}{45} \\ B &= -\frac{1}{45} \\ D &= -\frac{8}{225} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x(x^2 + 5)(2x + 5)} = \frac{1}{25x} - \frac{x + 2}{45(x^2 + 5)} - \frac{8}{225(2x + 5)}$$

שיטת *Heaviside* - שיטה נוספת למציאת המונים היא להכפיל את שני הצדדים באחד המכנים ואז להציב את מה שמאפס אותו

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+5)(2x+5)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{D}{2x+5} \\ \frac{1}{(x^2+5)(2x+5)} \Big|_{x=0} &= A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+5} + \frac{Dx}{2x+5} \Big|_{x=0} \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{(0+5)(0+5)} = \frac{1}{25} \\ \frac{1}{x(x^2+5)} \Big|_{x=-\frac{5}{2}} &= \frac{A(2x+5)}{x} + \frac{(Bx+C)(2x+5)}{x^2+5} + D \Big|_{x=-\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow D &= \frac{1}{-\frac{5}{2}(\frac{25}{4}+5)} = -\frac{8}{225} \\ \frac{1}{x(2x+5)} \Big|_{x=\pm i\sqrt{5}} &= \frac{A(x^2+5)}{x} + Bx + C + \frac{D(x^2+5)}{2x+5} \Big|_{x=\pm i\sqrt{5}} \\ \Rightarrow \begin{cases} i\sqrt{5}B + C &= -\frac{1}{10-i5\sqrt{5}} \\ -i\sqrt{5}B + C &= -\frac{1}{10+i5\sqrt{5}} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} C &= -\frac{2}{45} \\ B &= -\frac{1}{45} \end{cases} \end{aligned}$$

לאחר שהבאנו את הפונקציה לצורה הפשוטה ביותר, נחשב את האינטגרל. בד"כ נצטרך את אחד האינטגרלים הבאים

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (2)$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C \quad (3)$$

תרגיל 3

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

פתרון

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx \\ &\{u = x^2 + a^2, \quad du = 2xdx\} \\ &\frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{1/2}} du = u^{1/2} + C = \sqrt{a^2+x^2} + C \end{aligned}$$

תרגיל 4

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$$

פתרון

$$\int \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$
$$\{u = x^2 + a^2, \quad du = 2x dx\}$$
$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{3/2}} du = -u^{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

תרגיל 5

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

פתרון

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx$$
$$\left\{ \frac{x}{a} = \sinh u, \quad dx = a \cosh u \right\}$$
$$\frac{1}{a} \int \frac{a \cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \int du = u + C = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C =$$
$$\ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right| + C$$

תרגיל 6

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

פתרון

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{a^3} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{3/2}} dx$$
$$\left\{ \frac{x}{a} = \sinh u, \quad dx = a \cosh u \right\}$$
$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{a \cosh u}{\cosh^3 u} du = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\cosh^2 u} du = \frac{\tanh u}{a^2} + C$$
$$= \frac{1}{a^2} \frac{\sinh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

משוואות ספרביליות

משוואה מהצורה $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$, נקראת משוואה ספרבילית אם ניתן להפריד בין המשתנים בצורה הזו:

$$\frac{dx}{dt} = g(x)h(t)$$

דהיינו כל הפונקציות של x יחד עם dx באגף אחד והפונקציות של t יחד עם dt באגף השני. נפתור לפי:

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)dt$$

תרגיל 1

פתרו את המשוואה

$$1 + e^t x \dot{x} = 0$$

פתרון

$$\begin{aligned} 1 + e^t x \dot{x} &= 0 \\ x \dot{x} &= -e^{-t} \end{aligned}$$

הגענו למשוואה ספרבילית

$$\begin{aligned} x dx &= -e^{-t} dt \\ \int x dx &= - \int e^{-t} dt \\ \frac{x^2}{2} &= e^{-t} + C \\ x &= \sqrt{2e^{-t} + C} \end{aligned}$$

תרגיל 2

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$y' = \frac{x^2}{\sin y}$$

בעבור תנאי השפה: $y(0) = \pi$

פתרון

$$\begin{aligned}y' &= \frac{x^2}{\sin y} \\ \frac{dy}{dx} \sin y &= x^2 \\ \sin y dy &= x^2 dx \\ \int \sin y dy &= \int x^2 dx \\ -\cos y &= \frac{x^3}{3} + C \\ y &= \arccos\left(-\frac{x^3}{3} + C\right)\end{aligned}$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{aligned}y(0) &= \pi = \arccos(C) \\ C &= -1\end{aligned}$$

לכן הפתרון הינו

$$y = \arccos\left(-\frac{x^3}{3} - 1\right)$$

משוואה לינארית מסדר ראשון

משוואה מהצורה:

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)$$

הינה לינארית. כאשר $g(t) = 0$ המשוואה נקראת משוואה הומוגנית. הפיתרון למשוואה הומוגנית הוא

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t)x \\ \int \frac{dx}{x} &= \int f(t)dt \\ \ln x &= F(t) + \tilde{C} \\ x &= e^{F(t)+\tilde{C}} = Ce^{F(t)}\end{aligned}$$

כאשר

$$F(t) = \int f(t)dt$$

כאשר $g(t) \neq 0$ המשוואה נקראת משוואה לא הומוגנית, על מנת לפתור אותה נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$x = Ce^{F(t)}$$

על מנת לפתור את המשוואה הלא הומוגנית נהפוך את הקבוע C למשתנה $C(t)$. הפתרון הכללי הינו:

$$x = C(t)e^{F(t)}$$

כדי לפתור נציב חזרה במשוואה המקורית:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t)x + g(t) \\ \dot{C}(t)e^{F(t)} + \dot{F}(t)C(t)e^{F(t)} &= f(t)C(t)e^{F(t)} + g(t) \\ \dot{C}(t)e^{F(t)} &= g(t) \\ C(t) &= \int g(t)e^{-F(t)}dt\end{aligned}$$

מכאן קיבלנו כי:

$$x = \int g(t)e^{-F(t)}dte^{F(t)}$$

תרגיל 3

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\dot{x} = 2x + t^2$$

פתרון

המשוואה היא משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון, נפתור את המקרה ההומוגני

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x \\ \frac{dx}{dt} &= 2x \\ \int \frac{dx}{x} &= \int 2dt \\ \ln x &= 2t + C \\ x &= Ce^{2t}\end{aligned}$$

כדי לפתור את המשוואה הלא הומוגנית, נבצע וריאציה על הקבוע C כך שהוא תלוי בזמן $C(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + t^2 \\ \dot{C}(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t} &= 2C(t)e^{2t} + t^2 \\ C(t) &= \int t^2 e^{-2t} dt = -\frac{t^2}{2}e^{-2t} + \int te^{-2t} = -\frac{t^2}{2}e^{-2t} - \frac{t}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} \\ &= -\frac{t^2}{2}e^{-2t} - \frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C \end{aligned}$$

לכן הפתרון:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-\frac{t^2}{2}e^{-2t} - \frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C \right) e^{2t} \\ x(t) &= -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{2t} \end{aligned}$$

תרגיל 4

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \text{ עם תנאי התחלה}$$

פתרון

תחילה כדאי לנו לחלק ב t על מנת לקבל את הצורה הנוחה

$$y' = -\frac{2}{t}y + t - 1 + \frac{1}{t}$$

תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2}{t}y \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{2}{t}dt \\ \ln(y) &= -2 \ln(t) + C \\ y &= Ce^{-2 \ln(t)} = \frac{C}{t^2} \end{aligned}$$

נכתוב $y(t) = C(t)e^{-2 \ln(t)}$ ונציב בחזרה במשוואה, כך ש:

$$\begin{aligned} \dot{C}(t)e^{-2 \ln(t)} + \left(-\frac{2}{t}\right)C(t)e^{-2 \ln(t)} &= -\frac{2}{t}C(t)e^{-2 \ln(t)} + t - 1 + \frac{1}{t} \\ C(t) &= \int \left(t - 1 + \frac{1}{t}\right) e^{2 \ln t} dt \\ C(t) &= \int \left(t - 1 + \frac{1}{t}\right) t^2 dt \\ C(t) &= \int (t^3 - t^2 + t) dt \\ C(t) &= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו

$$y(t) = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C \right) e^{-2 \ln t}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2}$$

: נציב $y(1) = \frac{1}{2}$

$$y(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ומכאן

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

