7. מערכות רב-חלקיקיות

7.0 תנע

לכל גוף בעל מסה m שנע במהירות $\underline{v}$, אפשר לשייך ערך וקטורי:

<u>תנע</u>: $\boxed{p = m\underline{v}}$ $\qquad [p] = kg\,m\,s^{-1}$

קצב השינוי של התנע ניתן על ידי הכוח שפועל על הגוף:

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a} = \underline{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{dp}{dt}}$$

אפשר גם לחשב את שינוי התנע בזמן מסוים:

<u>מתקף</u>: $$\boxed{\Delta p = p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(t')\,dt'}$$

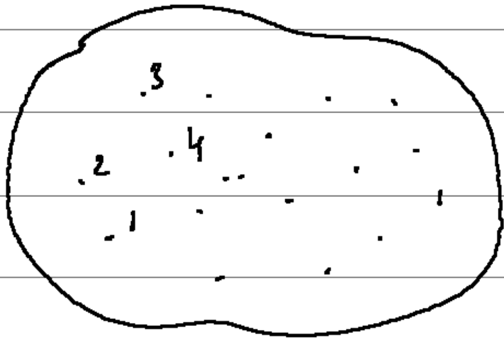
Δp נקרא <u>המתקף</u>.

7.1. ערכים של מערכת

נחלק את היקום לשני חלקים:

1) מספר גופים ששייכים למערכת שבה אנחנו מתעניינים.

2) שאר הגופים: העולם החיצוני.



$i = 1, 2, 3, \ldots$

לחלקיק i יש מסה, מקום, מהירות, תנע:

$$m_i, \ \underline{r}_i, \ \underline{v}_i, \ \underline{p}_i$$

מסת המערכת היא:

$$\boxed{M = \sum_i m_i}$$

תנע המערכת:

$$\boxed{\underline{P} = \sum_i \underline{P}_i = \sum_i m_i \underline{v}_i}$$

שימו לב: אין ערך דומה למהירות המערכת.

שינוי תנע המערכת בזמן:

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\underline{P}_i}{dt} = \sum_i \underline{F}_i$$

הכוח שפועל על חלקיק i מורכב מהכוח החיצוני $f_{i,ext}$ למערכת, והכוחות שמפעילים עליו החלקיקים האחרים במערכת:

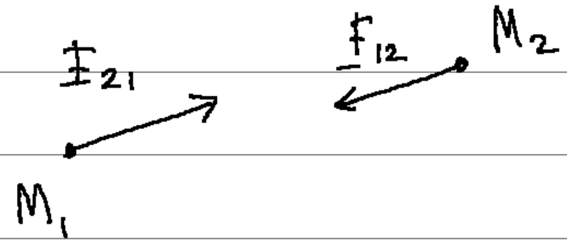
$$\underline{F}_i = \underline{f}_{i,ext} + \sum_{j\neq i} \underline{F}_{ji}$$

אבל,

$$\sum_i \underline{f}_i = \sum_i \underline{f}_{i,ext} + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \underline{F}_{ji}}_{=0}$$

חוק ניוטון 3:

חוק ניוטון 3:



$$F_{12} = -F_{21},$$

אז:

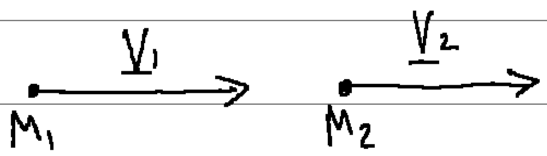
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \sum_i F_{i,ext} = F_{ext}}$$

זאת תוצאה חשובה מאוד: אם אין כוח חיצוני על המערכת אז התנע של המערכת לא משתנה:

$$\underline{F_{ext} = 0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\sum_i P_i(t=t_1) = \sum_i P_i(t=t_2)}.$$

שימור התנע במקרה כזה ($F_{ext}=0$) מאוד שימושי.

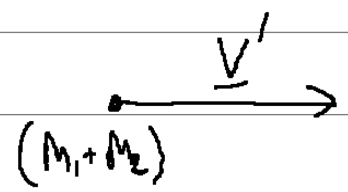
דוגמא: שני גופים שמתנגשים ונדבקים אחד לשני, בלי כוחות חיצוניים (נגיד על שולחן חלק):



תנע המערכת לפני :

$$\underline{P}^{I} = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2$$

אחרי זה יש גוף אחד עם תנע: $\underline{P}^{F} = (m_1+m_2)\,\underline{v}'$



שימור תנע קובע: $\underline{P}^{I} = \underline{P}^{F}$

$$(m_1+m_2)\,\underline{v}' = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2 .$$

למשל, אם המהירויות באותו כיוון, ו

$$m_1 = 1kg \,,\; v_1 = 5ms^{-1} \,,\; m_2 = 2kg,\; v_2 = 3ms^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v' = 11/3 \, ms^{-1}} .$$

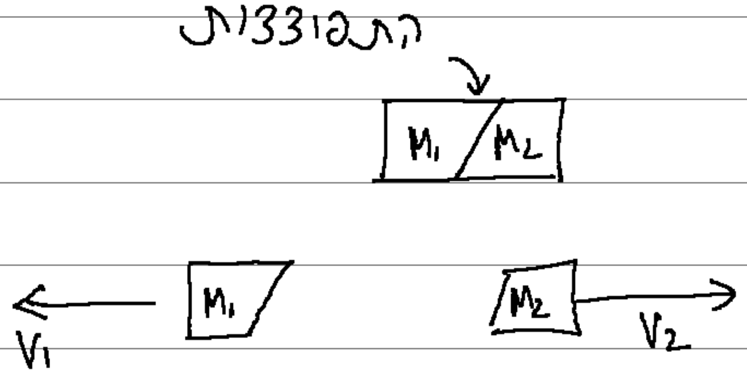
שימו לב: תנע נשמר אבל אנרגיה קינטית לא!

$$K^{I} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = 21.5J \,,$$
$$K^{F} = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)(v')^2 = 20.2J .$$

האנרגיה הקינטית יכולה להתאפס:

$|p_1| = |p_2|$,

ויכולה לעלות:



כללי: האנרגיה הקינטית של מערכת היא:

$$\boxed{k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i)^2 = \sum_i \frac{p_i}{2m_i}}$$

(אבל היא לא נשמרת אפילו אם אין כוחות חיצוניים.)

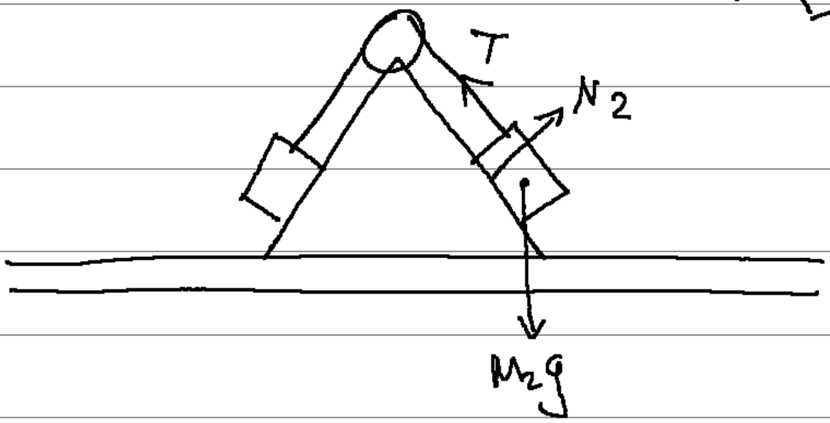
7.3 כוחות חיצוניים ופנימיים

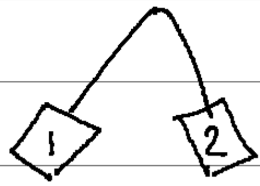
בדרך כלל אנו משווים את המערכת לגוף יחיד:

חוק ניוטון 2: $\frac{dP}{dt} = F_{ext}$

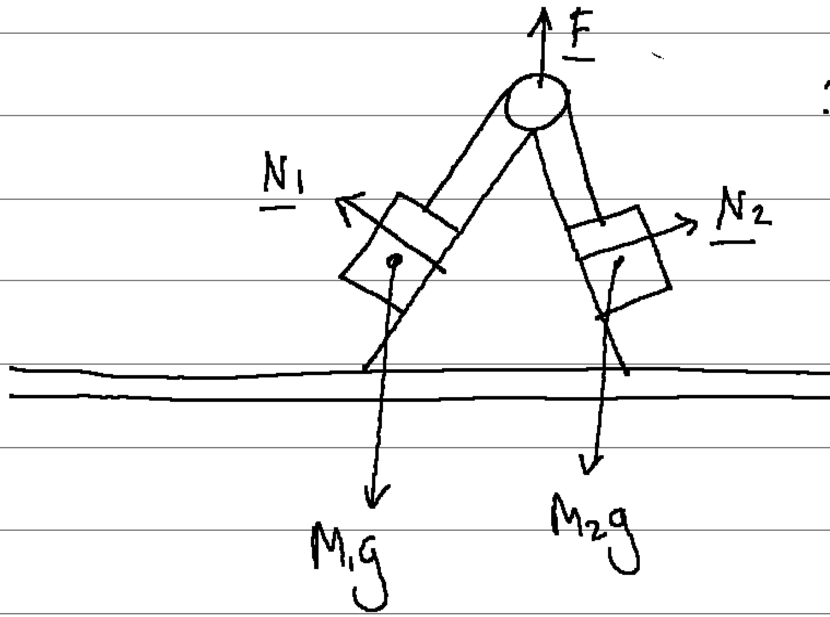
אבל אפשר לבנות מערכת איך שאנו רוצים
ולחלק כוחות לפנימיים וחיצוניים :

מערכת $\boxed{2}$:



מערכת: 

:



<u>בדרך כלל</u>: שווה להתייחס למערכת אם יש חילוק
נגדי של כוחות חיצוניים ופנימיים. למשל אם הכוחות
החיצוניים אפסיים או לא חשובים, ואותו דבר לכוחות
הפנימיים.

7.4. מרכז המסה

הגדרנו את התנע והמסה של המערכת:

$$\underline{P} = \sum_i \underline{P}_i \quad , \quad M = \sum_i M_i .$$

מהירות מרכז המסה V_{CM} היא כך ש:

$$\underline{P} = M V_{CM}$$

כלומר:

$$\boxed{\underline{V}_{CM} = \frac{\sum_i M_i \underline{V}_i}{\sum_i M_i} = \frac{\sum_i M_i \underline{V}_i}{M}}$$

כעת אפשר לקחת נגזרת של המהירות להגיע לתאוצת מרכז המסה:

$$\underline{F}_{ext} = \frac{d\underline{P}}{dt} = \frac{d(M_{CM} \underline{V}_{CM})}{dt} = M_{CM} \underline{a}_{CM}$$

תאוצת מרכז המסה:

$$\boxed{\underline{F}_{ext} = M_{CM} \underline{a}_{CM}}$$

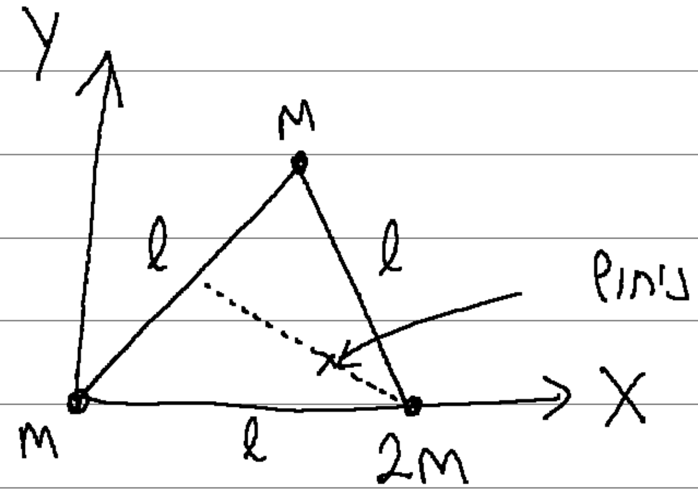
מרכז המסה של מערכת מתאר את התנועה של המערכת כמה שיותר קרוב לתנועה של גוף נקודתי.

מיקום מרכז המסה:

$$\boxed{\underline{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{M}}$$

כמו כן: $\underline{V}_{cm} = \frac{d\underline{R}_{cm}}{dt}$.

דוגמה:



$$4m\,\underline{R}_{cm} = \sum_i m_i \underline{r}_i \quad , \quad \underline{R}_{cm} = X_{cm}\hat{\underline{X}} + Y_{cm}\hat{\underline{Y}},$$

$\hat{\underline{X}}$: $\quad 4m\,X_{cm} = 0 + \frac{1}{2} l m + 2ml$

$\hat{\underline{y}}$: $\quad 4m\,Y_{cm} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} l m$

$$\Rightarrow \quad \underline{R}_{cm} = \frac{5}{8} l \hat{\underline{x}} + \frac{\sqrt{3}}{8} l \hat{\underline{y}} \; .$$

<u>דוגמה:</u> מערכת מורכבת משני תת-מערכות עם מסות M_1, M_2 ומרכזי מסה $\underline{R}_{cm,1}, \underline{R}_{cm,2}$.

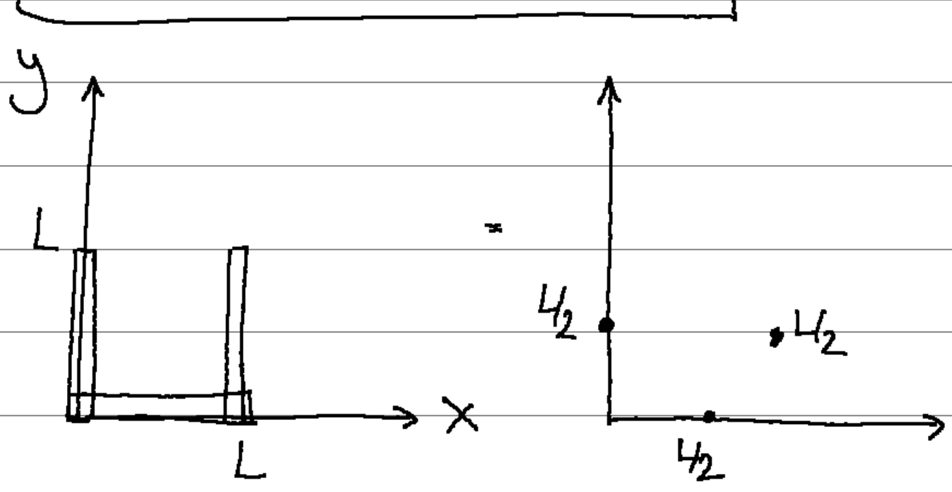
$$\underline{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum_1 m_i \underline{r}_i + \sum_2 m_i \underline{r}_i}{M_1 + M_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{R}_{cm} = \frac{M_1 \underline{R}_{cm,1} + M_2 \underline{R}_{cm,2}}{M_1 + M_2}}$$

זה שימושי לפרק מערכת לכמה חלקים שיותר קל לחשב את מרכזי המסה שלהם. בכללי אפשר:

$$\boxed{\underline{R}_{cm} = \frac{\sum_i M_i \underline{R}_{cm,i}}{\sum_i M_i}}$$

<u>דוגמא:</u>



$$\Rightarrow \underline{R}_{cm} = \frac{L}{2} \hat{\underline{x}} + \frac{L}{3} \hat{\underline{y}} .$$

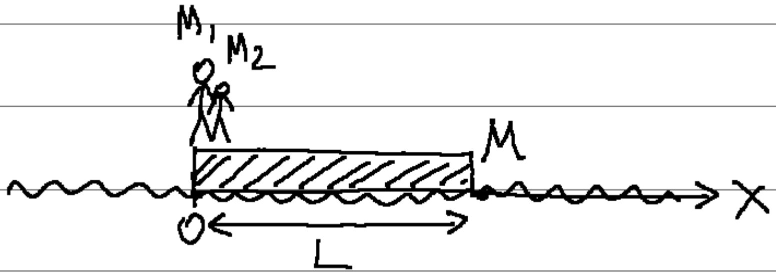
כאשר אין כוחות חיצוניים שפועלים על המערכת,
תאוצת מרכז המסה היא אפס.

$$F_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{dV_{cm}}{dt} = 0 .$$

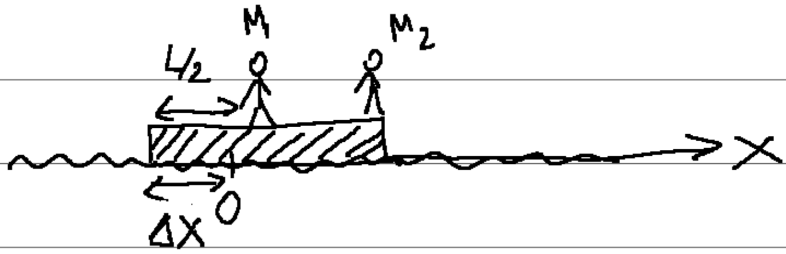
זה שימושי כדי להשוות מצבים של המערכת בזמנים שונים.

<u>דוגמה:</u> מבוגר וילד חוצים רפסודה:

(1)



(2)



$$(M_1+M_2+M)\, X^1_{cm} = \frac{ML}{2}.$$

$$(M_1+M_2+M)\, X^2_{cm} = M\left(\frac{L}{2}-\Delta x\right) + M_1\left(\frac{L}{2}-\Delta x\right) + M_2(L-\Delta x)$$

בגלל שאין תאוצה, ולא מהירות, למרכז המסה:

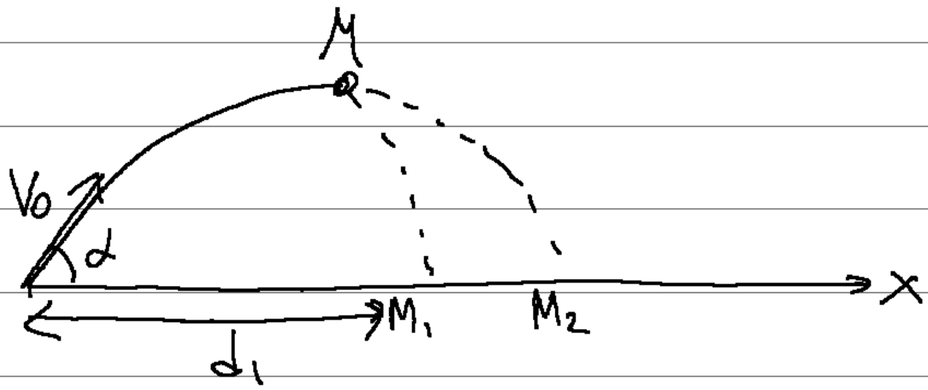
$$X^1_{CM} = X^2_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ML}{2} = (M+M_1+2M_2)\frac{L}{2} - \Delta x\,(M+M_1+M_2)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(M_1+2M_2)\,L}{2(M+M_1+M_2)}.$$

גם אם יש למרכז המסה תאוצה ומהירות הוא שימושי לתיאור תנועת המערכת.

דוגמה:



כדור מתפצל (באופן אופקי $\leftarrow\bullet\rightarrow$) כך שהחלקים פוגעים בקרקע באותו זמן. מה זה d_2?

מרכז המסה נע כמו גוף נקודתי:

$$y_{cm} = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_{cm} = v_0 \cos\alpha\, t$$

מרכז המסה פוגע בקרקע בזמן:

$$t_g = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}.$$

$$d_{cm} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}.$$

מרכז המסה, מוגדר לגופים רבים:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow d_{cm} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{1}{m_2}\left(\frac{2(m_1+m_2) v_0^2 \cos\alpha \sin}{g} - m_1 d_1\right).$$

7.6. אנרגיה של מערכת

את המסה והתנע של המערכת יכלנו לשייך למרכז המסה. אי אפשר לעשות משהו דומה עם אנרגיה.

למשל את האנרגיה הקינטית:

$$k = \sum_i \frac{m_i |\underline{v}_i|^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{M|\underline{V}_{cm}|^2}{2} + \sum_i \frac{m_i (\underline{v}_i - \underline{V}_{cm})^2}{2}}.$$

גם אנרגיה פוטנציאלית אי אפשר לשייך למרכז המסה בלבד.