מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 5

פונקציות מרובות משתנים

הנגזרת החלקית לפי x של פונקצייה מרובת משתנים $f\left(x,y,z\right)$ מסומנת באחד הסימונים הבאים $f_{x},\partial_{x}f,\frac{\partial f}{\partial x}$ ומוגדרת בצורה הבאה:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} & =\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(x+\Delta x,y,z\right)-f\left(x,y,z\right)}{\Delta x}\\
\frac{\partial f}{\partial y} & =\lim_{\Delta y\to0}\frac{f\left(x,y+\Delta y,z\right)-f\left(x,y,z\right)}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

הדיפרנציאל מוגדר

$$
\begin{aligned}
df= & \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\\
\equiv & \vec{\nabla}f\cdot d\vec{r}\\
\vec{\nabla}\equiv & \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
\vec{\nabla}f\equiv & \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\\
d\vec{r}\equiv & (dx,dy,dz)
\end{aligned}
$$

כאשר הווקטור $\vec{\nabla}f$ נקרא ווקטור הגרדיאנט.

תרגיל 1

חשבו את כל הנגזרות מסדר ראשון ושני של הפונקציה

$$f(x,y)=x\cos y+ye^{x}$$

פתרון

$$
\begin{aligned}
f_x &= \cos y + y e^x \\
f_y &= -x \sin y + e^x \\
f_{xx} &= y e^x \\
f_{yy} &= -x \cos y \\
f_{xy} &= -\sin y + e^x \\
f_{yx} &= -\sin y + e^x
\end{aligned}
$$

תרגיל 2

נתונה הפונקציה $f(x,y) = xy$ ונתונה הפרמטריזציה $x = 2\cos(t)\,, y = \sin(t)$. חשבו את הנגזרת המלאה $\frac{df}{dt}$

פתרון

דרך א' - ישירות

$$
\begin{aligned}
f &= xy = 2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t) \\
\frac{df}{dt} &= 2\cos(2t)
\end{aligned}
$$

דרך ב' - לפי כלל השרשרת

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dt} =& \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \\
=& y(-2\sin(t)) + x\cos(t) \\
=& -2\sin^2(t) + 2\cos^2(t) = 2\cos(2t)
\end{aligned}
$$

טור טיילור בשני משתנים

כאשר מפתחים את טור טיילור בשני משתנים אנחנו פשוט מפתחים עבור משתנה אחד, כשהשני קבוע, ואז מפתחים כל איבר עבור המשתנה השני, כשהראשון קבוע, הסדר של הטור נקבע לפי המכפלה של שני המשתנים.

$$
\begin{aligned}
&f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y\right)+\partial_x f\left(x_0,y\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}\partial_x^2 f\left(x_0,y\right)\left(x-x_0\right)^2\\
&f\left(x_0,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\partial_y f\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)+\frac{1}{2!}\partial_y^2 f\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)^2\\
&\partial_x f\left(x_0,y\right)\left(x-x_0\right)=\partial_x f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+\partial_x\partial_y f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)\\
&\frac{1}{2!}\partial_x^2 f\left(x_0,y\right)\left(x-x_0\right)^2=\frac{1}{2!}\partial_x^2 f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)^2
\end{aligned}
$$

וסך הכל

$$
\begin{aligned}
f\left(x,y\right)=&f\left(x_0,y_0\right)+\partial_x f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+\partial_y f\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)+\partial_x\partial_y f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+\\
&+\frac{1}{2!}\partial_x^2 f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)^2+\frac{1}{2!}\partial_y^2 f\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)^2
\end{aligned}
$$

תרגיל 3

פתח את טור טיילור עד סדר שני של הפונקציה סביב $x_0=y_0=0$

$$f\left(x,y\right)=x\cos y+ye^x$$

פתרון

נפתח את הטור סביב $x_0=y_0=0$

$$f\left(x,y\right)=x\cos y+ye^x$$

$$
\begin{aligned}
f &= x\cos y + ye^{x}|_{x,y=0} = 0\\
f_x &= \cos y + ye^{x}|_{x,y=0} = 1\\
f_y &= -x\sin y + e^{x}|_{x,y=0} = 1\\
f_{xx} &= ye^{x}|_{x,y=0} = 0\\
f_{yy} &= -x\cos y|_{x,y=0} = 0\\
f_{xy} &= -\sin y + e^{x}|_{x,y=0} = 1\\
f_{yx} &= -\sin y + e^{x}|_{x,y=0} = 1
\end{aligned}
$$

ומכאן:

$$f\left(x,y\right) = x + y + xy$$

משפט לייבניץ

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f\left(x,y\right)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_x f\left(x,y\right)dy + f\left(x,h\left(x\right)\right)\partial_x h\left(x\right) - f\left(x,g\left(x\right)\right)\partial_x g\left(x\right)$$

תרגיל 4

חשבו את הביטוי

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{2x} e^{x+y}dy$$

פתרון

על פי משפט לייבניץ:

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{2x} e^{x+y}dy = \int_{0}^{2x} \partial_x e^{x+y}dy + 2e^{3x} =$$

$$= \int_0^{2x} e^{x+y} dy + 2e^{3x} = e^x \int_0^{2x} e^y dy + 2e^{3x} = e^x \left(e^{2x} - 1\right) + 2e^{3x} = 3e^{3x} - e^x$$

נקודות קיצון של פונקציה בשני משתנים

האלגוריתם למציאת נקודות קיצון ושרטוט פונקציה מרובת משתנים:

1. נחפש נקודות חשודות (x_0, y_0) שעבורן הנגזרת הראשונה לפי שני המשתנים מתאפסת:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

2. נגדיר את הדטרמיננטה של הנגזרות השניות:

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

   (א) אם $D(x_0, y_0) > 0$ נבחר את אחת הנגזרות השניות (למשל $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$) ונבדוק:
      i. אם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ זוהי נקודת מינימום.
      ii. אם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ זוהי נקודת מקסימום.
   (ב) אם $D(x_0, y_0) < 0$ זוהי נקודת אוכף.
   (ג) אם $D(x_0, y_0) = 0$ צריך לגזור הלאה.

3. נבדוק אילו ערכים הפונקציה מקבלת לאורך גבולות תחום ההגדרה שלה

4. נשרטט את קווי הגובה כפתרון של המשוואה $f(x,y) = C$

דוגמאות:

1. הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

כאשר נתון שהיא מוגדרת בתחום $x^2+y^2\leq 2$.

הנגזרות הראשונות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=y$$

הנקודה החשודה היחידה היא לכן $(x_0,y_0)=(0,0)$.

הנגזרות השניות:

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

בנקודה החשודה $D(0,0)>0$ וגם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)>0$, לכן זוהי נקודת מינימום.
לבסוף, נבדוק את השפה: על שפת העיגול ערך הפונקציה ($=1$) קבוע לאורך השפה וגדול מהערכים בקרבת השפה, לכן זהו מקסימום.

2. הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

הנגזרות הראשונות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-y$$

הנקודה החשודה היחידה היא שוב $(x_0,y_0)=(0,0)$.

הנגזרות השניות:

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1$$

לכן זוהי נקודת אוכף.

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+4y^2$

1. בחיתוך עם הצירים, מהי הפונקציה
2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה
3. שרטטו את קווי הגובה של הפונקציה

פתרון

1. בחיתוך עם הצירים נקבל פונקציות של משתנה אחד

$$f(x,0)=x^2, f(0,y)=4y^2$$

2. נגזור את הפונקציה

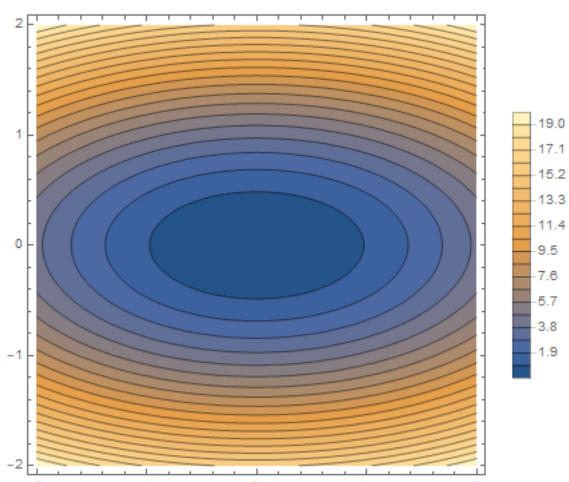
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=8y$$

הנגזרות האלו מתאפסות רק בנקודה $(0,0)$

נמצא את $D(x,y)$

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=16>0$$

מכיוון ש $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$ זוהי נקודת מינימום
מכאן הפונקציה עולה כאשר קווי הגובה יהיו אליפסות



משפט 1

הגרדיאנט בנקודה ניצב למשיק לקו הגובה העובר דרך הנקודה.

משפט 2

הגרדיאנט בנקודה מצביע בכיוון בו ערך הפונקציה גדול ביותר.
על פי הגדרת הגרדיאנט

$$df=\vec{\nabla}f\cdot d\vec{r}=\left|\vec{\nabla}f\right|\cdot\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

לכן עבור $|d\vec{r}|$קבוע השינוי בפונקציה df יהיה אפס כאשר $d\vec{r}$ מאונך לגרדיאנט (קו גובה) ומקסימלי עבור $d\vec{r}$ מקביל לגרדיאנט.

תרגיל 2

נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=y\sin\left(x\right)$

1. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה
2. שרטטו את קווי הגובה של הפונקציה
3. שרטטו את קווי השדה של הגרדיאנט

פתרון

נגזור את הפונקציה

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cos x,\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x$$

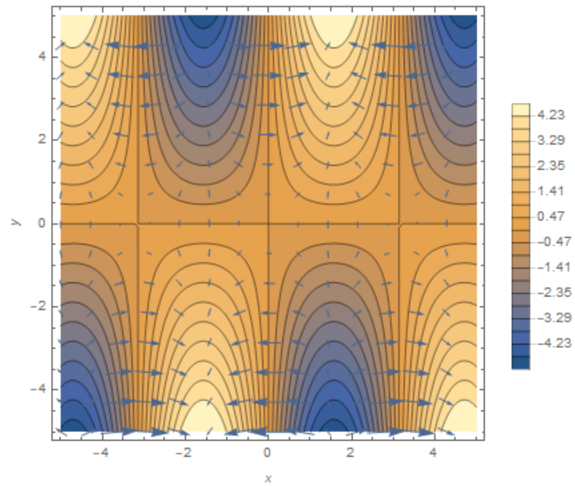
הנגזרות האלו מתאפסות בנקודות $\left(\pi\cdot n,0\right)$
נמצא את $D\left(x,y\right)$

$$D\left(x,y\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-y\sin\left(x\right) & \cos\left(x\right)\\ \cos\left(x\right) & 0\end{vmatrix}=-\cos^2\left(x\right)$$

מכיוון ש $\cos^2\left(x\right)$ תמיד חיובי עבור $x=\pi\cdot n$, $D\left(x,y\right)<0$ ולכן אלו נקודת אוכף.
נשרטט את קווי הגובה והגרדיאנט.

$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(y\cos x,\sin x\right)$$

נשים לב שהפונקציה מתאפסת על הצירים ועבור $x = \pi \cdot n$ והיא מחזורית ב 2π



תרגיל 3

עבור הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

1. מצאו נקודות קיצון
2. קיימת טרנספורמציית סיבוב של מערכת הצירים כך:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x} + \tilde{y}\right)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x} - \tilde{y}\right)$$

מצאו נקודות קיצון עבור הפונקציה $f\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)$

פתרון

1. נמצא נגזרות ראשונות

$$f_x = 2x + 3y = 0$$
$$f_y = 2y + 3x = 0$$

יש נקודה חשודה בראשית. נמצא נגזרות שניות

$$f_{xx} = 2$$
$$f_{yy} = 2$$
$$f_{xy} = 3 = f_{yx}$$

ומכאן שדטרמיננטת הנגזרות השניות היא

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}_{(0,0)} = -5 < 0$$

לכן זו נקודת אוכף

2. עבור הטרנספומצייה

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}+\tilde{y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\tilde{x}-\tilde{y}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\tilde{x}+\tilde{y}\right)\left(\tilde{x}-\tilde{y}\right) = \tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\frac{3}{2}\left(\tilde{x}^2-\tilde{y}^2\right) = \frac{5}{2}\tilde{x}^2 - \frac{1}{2}\tilde{y}^2$$

$$f_{\tilde{x}} = 5\tilde{x} = 0$$
$$f_{\tilde{y}} = -\tilde{y} = 0$$

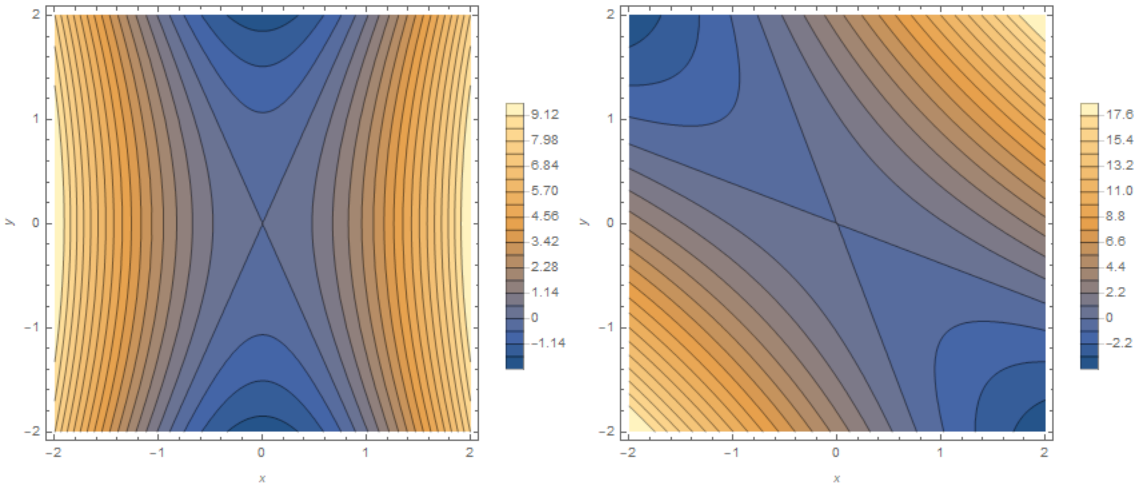
הנקודה החשודה נשארה בראשית (סובבנו את המערכת אבל לא שינינו את מיקום הראשית)

$$f_{\tilde{x}\tilde{x}} = 5$$
$$f_{\tilde{y}\tilde{y}} = -1$$
$$f_{\tilde{x}\tilde{y}} = 0 = f_{\tilde{y}\tilde{x}}$$

$$\begin{vmatrix} f_{\tilde{x}\tilde{x}} & f_{\tilde{x}\tilde{y}} \\ f_{\tilde{y}\tilde{x}} & f_{\tilde{y}\tilde{y}} \end{vmatrix}_{(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

גם הערך של D לא השתנה וזו עדיין נקודת אוכף.

נסתכל על קווי הגובה של שתי הפונקציות. ניתן לראות שזו אותה פונקציה שסובבה סביב מערכת הצירים



איור 1: הגרף הימני מתאר את $f\left(x,y\right)$ והשמאלי את $f\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)$