

9. תנועה סיבובית

9.1 מכפלה וקטורית

$\underline{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$  :  $\underline{a}$  וקטור

$\underline{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$

כפל וקטורית :

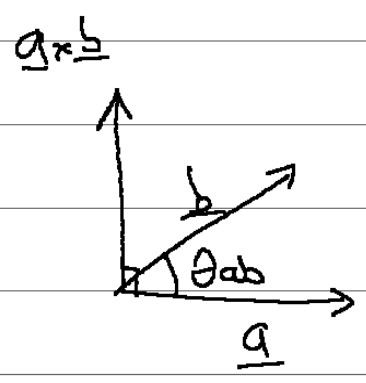
$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$  : מכפלה וקטורית

כפל וקטורית :

$|\underline{c}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \theta_{ab}$

$\underline{a}$	כפל וקטורית	כפל וקטורית
$\underline{b}$	כפל וקטורית	כפל וקטורית
$\underline{c}$	כפל וקטורית	כפל וקטורית

כפל וקטורית :



$\underline{b} \times \underline{a} = -\underline{c}$

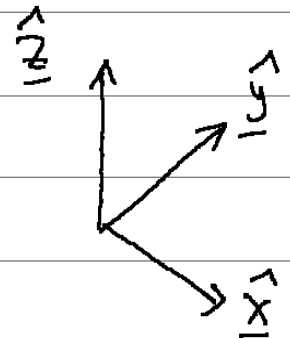
סיכום: מכפלה וקטורית של שני וקטורים באותו כיוון היא אפס.

הכפלה וקטורית של שני וקטורים היא וקטור הנמצא במישור שנוצק על ידי שני וקטורים.

נוסחה לזיהוי מכפלה וקטורית:

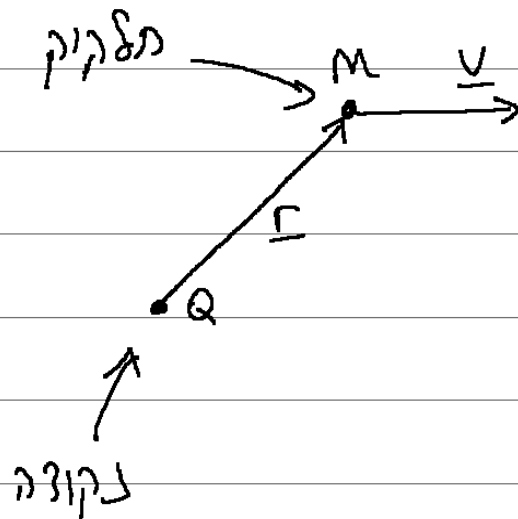
$$\underline{\hat{x}} \times \underline{\hat{y}} = \underline{\hat{z}}, \quad \underline{\hat{y}} \times \underline{\hat{z}} = \underline{\hat{x}}, \quad \underline{\hat{z}} \times \underline{\hat{x}} = \underline{\hat{y}}, \quad \underline{\hat{x}} \times \underline{\hat{x}} = 0$$

$$\underline{c} = (a_y b_z - a_z b_y) \underline{\hat{x}} + (a_z b_x - a_x b_z) \underline{\hat{y}} + (a_x b_y - a_y b_x) \underline{\hat{z}} .$$



## 9.2. תנע סגור ומומנט כוחות

תנע סגור הוא כמות שמשתמרת במערכת סגורה.



$$\underline{J}_Q = \underline{r}_Q \times \underline{p} = m \underline{r}_Q \times \underline{v} \quad \text{תנע סגור}$$

ישו"ת תנע סגור הוא כמות שמשתמרת במערכת סגורה.

$$\frac{d\underline{J}_Q}{dt} = \frac{d}{dt} (m \underline{r}_Q \times \underline{v})$$

$$= m \frac{d\underline{r}_Q}{dt} \times \underline{v} + m \underline{r}_Q \times \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$= m \underline{v} \times \underline{v} + \underline{r}_Q \times (m \underline{a}) = \underline{r}_Q \times \underline{F}$$

$$\frac{dJ_Q}{dt} = \tau_Q, \quad \tau_Q = L_Q \times F : \text{מומנט ביטול}$$

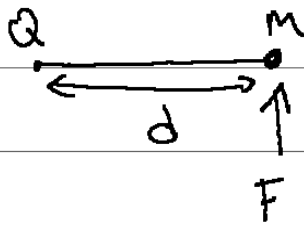
סימנים:  $\frac{dL_Q}{dt} = v$  , הגדלינות היא תכונה

שם התהליך ולא תלויה בתקופה Q קמתה הכוללת  
מקור גמט עליה

כח פועל שם,  $\Delta p = F \Delta t$

מומנט ביטול קבוע:  $\Delta J_Q = \tau_Q \Delta t$

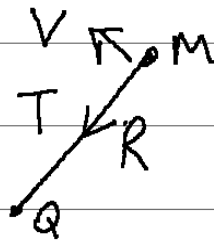
צורה: כיוון של כח בלי מוקדם, כוח F שם  
בשם T



מומנט ביטול:  $|\tau_Q| = dF$

תנאי שוויון:  $|J_Q| = dFT$

הערה: נוסדה במסגרת זו:



$$|\underline{L}_Q| = 0, \quad \underline{L} \times \underline{r}_Q = 0.$$

$$|\underline{J}_Q| = m v R = (m R^2) \frac{v}{R}$$

$$= (m R^2) \omega$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$

$$I_Q \leftarrow \text{מומנט אינרציה}$$

הערה נוספת:

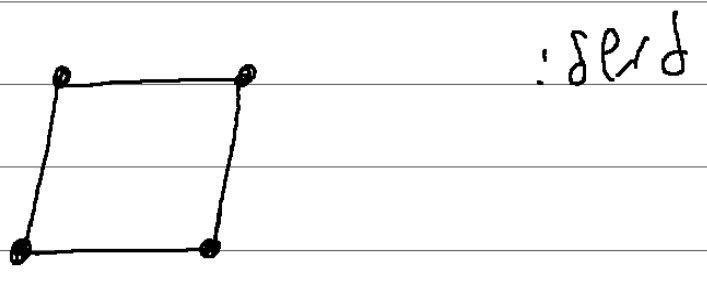
$$|\underline{J}_Q| = J_Q = I_Q \omega \quad : \text{מומנט אינרציה}$$

$$|\underline{L}_Q| = L_Q = I_Q \alpha$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

9.3. מומנט קטור של גוף קשיח

גוף קשיח הוא כקולקטיון של חלקיקים  
שלא משתנים במרחב היחסי



גוף קשיח מסווגי של עם נקודה :  $J_{Q_i} = M_i R_i^2 \omega$   
התנע הזוויתי של הגוף :

$$J_Q = I_Q \omega, \quad I_Q = \sum_i M_i R_i^2$$

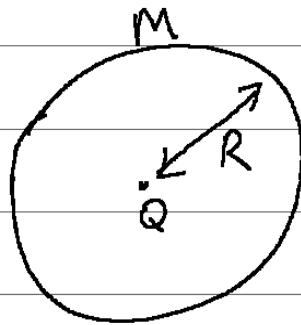
( $R_i$  טווח המרחק בין  $Q$  לנקודה  $i$ )

גוף קשיח הסימול של הגוף :

$$\tau_Q = I_Q \alpha$$

$$\begin{aligned} (\underline{p} = m \underline{v} &\Leftrightarrow J_Q = I_Q \omega) \\ (\underline{F} = m \underline{a} &\Leftrightarrow \tau_Q = I_Q \alpha) \end{aligned}$$

צירוף: ממשל התנאי של צורה זקנה :



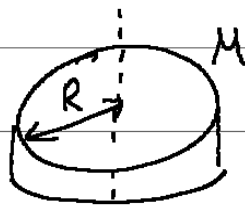
$$I_Q = \sum_i M_i R_{Qi}^2 = (\sum_i M_i) R^2 = MR^2.$$

בנוסף, ה'א' מרכז המסה של גוף. כן  
אפשר לפרש את ממשל התנאי של מרכז המסה  
של צורה זקנה :

$$I_{CM} = MR^2 \quad \text{צורה זקנה}$$

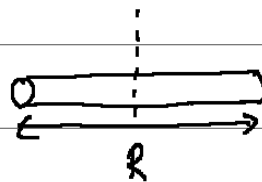
ממשל התנאי של גוף קטן:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$$



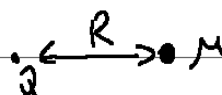
צורה זקנה

$$I_{CM} = \frac{1}{12} MR^2$$



צורה זקנה

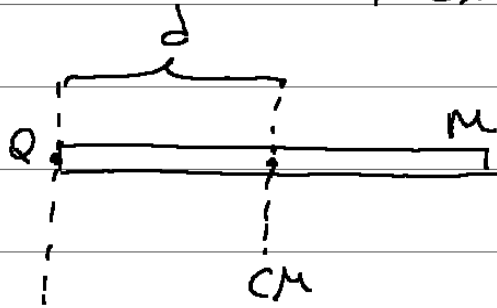
$$\left( I_Q = MR^2 \right.$$



צורה זקנה)

9.4. צירוף נקודות (על עיני)

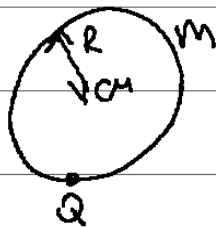
מחשבו את המומנט של גוף סגור צירוף נקודות  
צירוף נקודות:



$$I_Q = I_{CM} + M d_{Q,CM}^2$$

$$I_Q = \frac{1}{12} M R^2 + M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \quad \text{לפי: מדויק}$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) M R^2 = \frac{1}{3} M R^2$$



לפי: מדויק

$$I_Q = \underbrace{M R^2}_{I_{CM}} + M R^2 = 2 M R^2$$



9.5. אנרגיה קינטית של גוף קשיח מסתובב

אנרגיה קינטית של גוף קשיח מסתובב  
מרכיבת מאנרגיית סגרוג סביב מרכז המסה  
ומאנרגיית תנועת מרכז המסה:

$$K = K_{\text{קנט}} + K_{\text{מ}}$$

$$K = \frac{1}{2} M |v_{\text{cm}}|^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

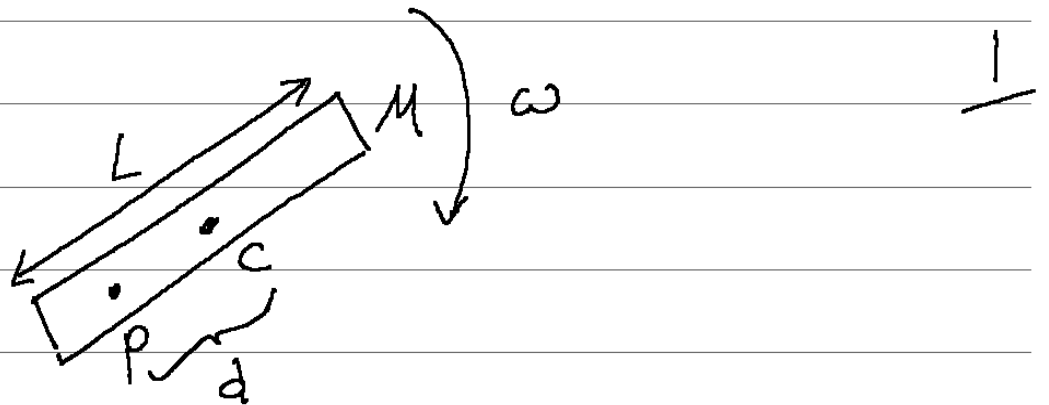
$v_{\text{cm}}$  היא תנועת מרכז המסה  
 $I_{\text{cm}}$  זהו מומנט ההתנפ סביב מרכז המסה  
 $\omega$  זהו תנועת סגרוג סביב מרכז המסה.

אם גוף מסתובב סביב ציר  $Q$  מרחק  $d$  מרכז המסה,  $SC$ ,  
 $|v_{\text{cm}}|^2 = (\omega d)^2$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} (I_{\text{cm}} + Md^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_Q \omega^2$$

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} I_Q \omega^2 \quad \text{היא מסתובב:}$$

תורת הדינמיקה 9.6

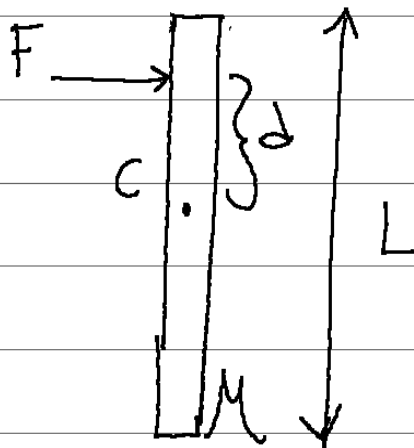


מה התנע הזוויתי סביב נקודה P, ומה המומנט?

$$|J_c| = \frac{1}{2} M L^2 \omega \quad I_c = \frac{1}{2} M L^2$$

$$|J_p| = \left( \frac{1}{2} M L^2 + M d^2 \right) \omega \quad I_p = \frac{1}{2} M L^2 + d^2 M$$

2 (1) נשאל, כיצד נקבע C:



$$|T_c| = dF$$

מהו המומנט סביב C?

הכוח פועל בפינת  $\mu S$  קצר  $T$ , מה המהירות הסיבובית?

$$|\Delta J_c| = |\underline{J}_c| \cdot T = \frac{1}{2} M L^2 \omega$$

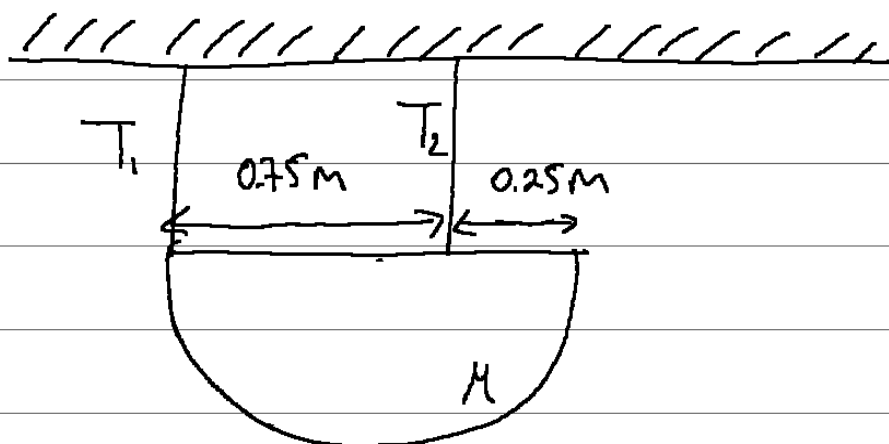
$$\Rightarrow \omega = \frac{12 F d T}{M L^2}$$

אם לא היה ציר, מה המהירות מכנס המסה?

$$\underline{F}_{ext} = M \underline{a}_{cm}$$

$$\Rightarrow FT = M |v_{cm}|$$

$$\Rightarrow |v_{cm}| = \frac{FT}{M}$$



מה האטיות  $T_2, T_1$ ?

נייטון 2 בכיוון  $\hat{j}$ :

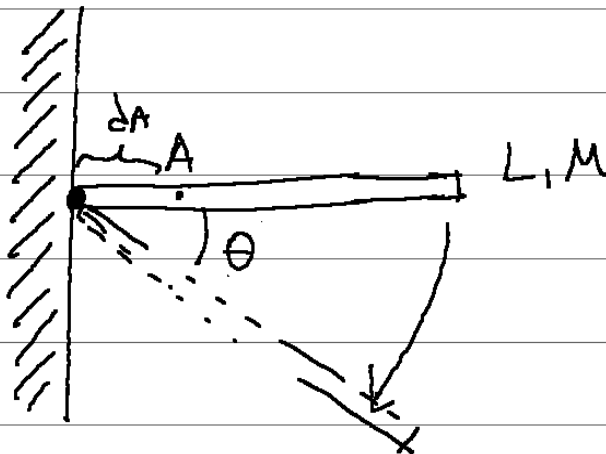
$$T_1 + T_2 = mg$$

כוח הפילוס סביב נקודת הכניסה:

$$\frac{L}{2} T_1 - \frac{L}{4} T_2 = 0$$

$$\Rightarrow T_2 = 2T_1$$

$$T_1 = \frac{mg}{3}, \quad T_2 = \frac{2mg}{3} \quad , SC$$

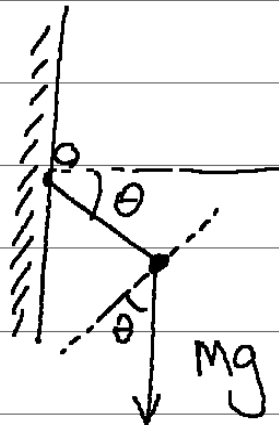


4

מה התאוצות של נקודה  $A$  כפונקציה של הזווית  $\theta$ ?

מאחר שהכוחות נגזרים של יציב כבידה.

אפשר להתייחס אליו כנקודה גאומטרית גסה:



$$|\tau_0| = Mg \cos \theta \cdot \frac{L}{2}$$

$$|\tau_0| = \left( \frac{ML^2}{3} \right) \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3g \cos \theta}{2L}$$

תאוצה זוויתית:

אין תאוצה צנטריפוגלית, אף התאוצה:

$$a_A = \frac{3g \cos \theta}{2L} \cdot dA$$

---

5 קרוסלה לשוהרת 500kg, עם רדיוס 10m,

מסתגבות במהירות זוויתית של  $0.5 \text{ rad/s}$ .

מה האנרגיה הקינטית של הקרוסלה?

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

$$= 3125 \text{ J}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$= \frac{1}{2} (500) 10^2$$

$$= 25,000 \text{ kgm}^2$$

מה המומנט הזוויתי של הקרוסלה?

$$|L_{cm}| = I_{cm} \omega = 12,500 \text{ kgm}^2 \text{ rad/s}$$

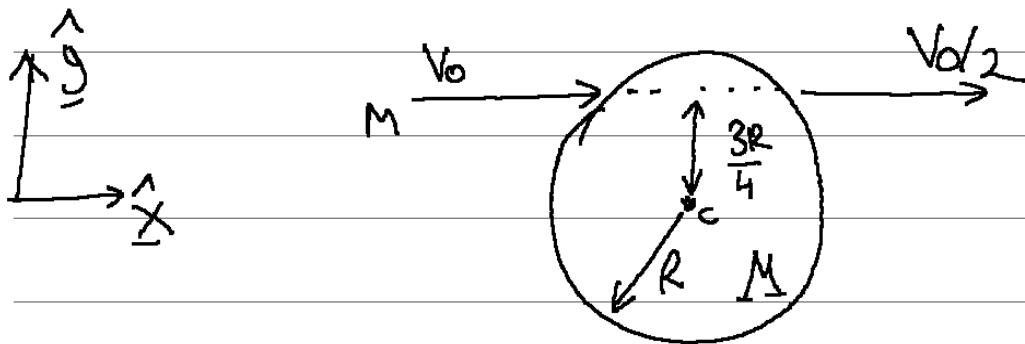
יש 3 שיהם 40kg קופס עם הקרוסלה במרחק של 4m מהמרכז. מה המהירות הזוויתית של הקרוסלה?

$$I_{cm} \omega = I_{cm} \omega_f + I_c \omega_f \quad \text{שימור תנע זוויתי}$$

$$MR^2 = 40 \cdot 4^2 \quad \text{אנחנו התמקדנו על ה'?'}$$

$$\Rightarrow \omega_f = \frac{12.500}{(25,000 + 640)} = \underline{\underline{0.488 \text{ rad s}^{-1}}}$$

$\cancel{v}$  קלוד עמ משה M ומהירות  $v$  עאר צכמ  
 צסקה, משה שיעור להסתגב סגור  
 מכה, ויוצא מהירות  $v/2$ .



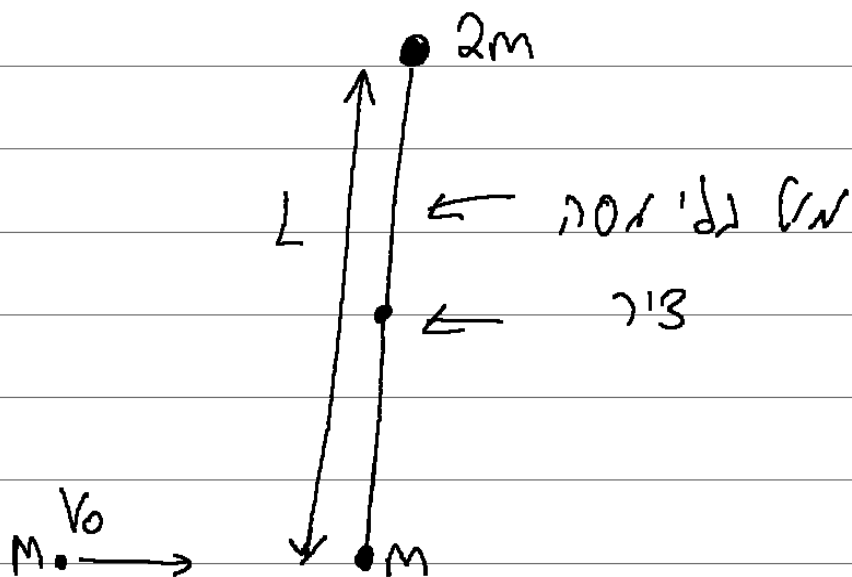
מה המהירות הזוויתית הסופית של הצסקה?

$$J_i = M v_0 \frac{3R}{4} \quad \text{שיאר תנע זוויתי:}$$

$$J_f = \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \omega + M v_0 \frac{3R}{4}$$

$$\underline{v_0} = v_0 \underline{\hat{x}}, \quad \underline{r} = r_x \underline{\hat{x}} + \frac{3R}{4} \underline{\hat{y}} \quad \text{ס'מלג:}$$

$$\left[ \underline{r} \times \underline{v_0} \right] = v_0 \frac{3R}{4}, \quad \text{לא תלוי ב-} r_x \text{:}$$



גוף זר מסה  $m$  ומהירות  $v_0$  מרחק ותצבור  
 בקצה של מוט (גלוי מסה) אור מוקדם  $m$  בקצה אחר,  
 ו  $2m$  בקצה שלי.

אחר התנגשות, מה גובה מרכז מסה?  
 גאומטרי בקצוות?

$J_i = m v_0 \frac{L}{2}$  : שחר תנע זוויתי :

$J_f = I_{cm} \omega$  .

$I_{cm} = (2m) \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (2m) \left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2$  .



$$\Rightarrow \omega = \frac{v_0}{2L}$$

האנטי בקצוות נצוים בתנועת מעגלית עם  
מהירות זוויתית קבועה. זה צורך תאוצה  
צנטריפוגלית של:

$$a_n = \omega^2 \frac{L}{2} = \frac{v_0^2}{8L}$$

$$F_n = 2ma_n = \frac{v_0^2 m}{4L}$$

---