מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 6

אינטגרלים כפולים ומשולשים

החלפת סדר סכימה כאשר עושים אינטגרל כפול צריך לכסות את כל השטח הכלול באינטגרל, אך ניתן לעשות זאת בשתי דרכים, לללכת כל פעם בכיוון $\hat{x}$ כאשר y נתון, או להיפך. אם הגבולות לא תלויים אחד בשני אפשר להחליף את הסדר מיידית. אם הם תלויים צריך להגדיר את הגבולת כך שיתאימו לסדר האינטגרציה.

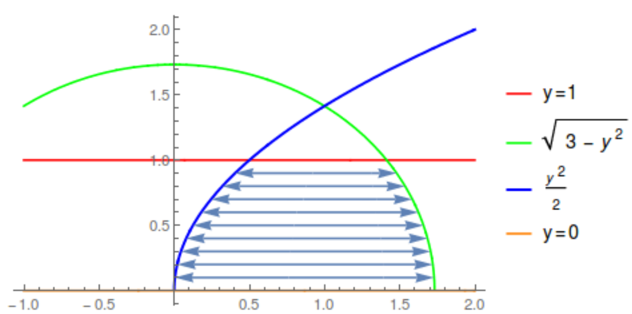
תרגיל 1

חשבו את האינטגרל בשתי דרכים על ידי שינוי גבולות האינטגרציה

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} xy^2 dx$$

פתרון

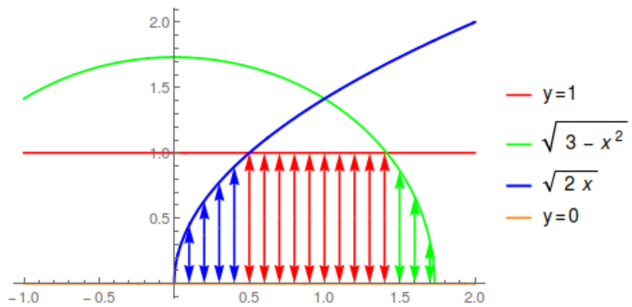
לפי סדר הגבולות שבאינטגרל האינטגרל צריך להתבצע באופן הבא:



$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} xy^2dx=\int_0^1 dy\left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}}=\int_0^1\left(\frac{(3-y^2)\,y^2}{2}-\frac{y^6}{8}\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3y^2}{2}-\frac{y^4}{2}-\frac{y^6}{8}\right)dy=\left.\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y^5}{10}-\frac{y^7}{56}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{56}=\frac{280}{560}-\frac{56}{560}-\frac{10}{560}=\frac{214}{560}=\frac{107}{280}$$

כשנבוא להחליף את סדר הגבולות נשים לב שזה מחלק לנו את האינטגרל לשלושה אינטגרלים שונים:



לכן נפריד את האינטגרל לשלושה אנטגרלים:

$$I=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\int_0^{1/2}dx\int_0^{\sqrt{2x}}dy\left(xy^2\right)=\int_0^{1/2}dx\left.\frac{xy^3}{3}\right|_0^{\sqrt{2x}}=\int_0^{1/2}\frac{2^{3/2}x^{5/2}}{3}dx=\left.\frac{2^{5/2}x^{7/2}}{21}\right|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{42}$$

$$I_2=\int_{1/2}^{\sqrt{2}}dx\int_0^1 dy\left(xy^2\right)=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1/2}^{\sqrt{2}}\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1=\frac{7}{24}$$

$$I_3=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}}dy\left(xy^2\right)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\left.\frac{xy^3}{3}\right|_0^{\sqrt{3-x^2}}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{x(3-x^2)^{3/2}}{3}dx=\int_2^3\frac{(3-x^2)^{3/2}}{6}d\left(x^2\right)=$$

$$=-\left.\frac{(3-x^2)^{5/2}}{15}\right|_{x^2=2}^{x^2=3}=\frac{1}{15}$$

$$I=\frac{1}{42}+\frac{7}{24}+\frac{1}{15}=\frac{107}{280}$$

מערכות קואורדינטות כאשר אנחנו רוצים לחשב אינטגרלים בכמה משתנים יש חשיבות גדולה לבחירה של מערכת הקואורדינטות המתאימה, מערכת שמתאימה לסימטריה של הבעיה תקל עלינו מאוד את החישוב. כדי לקבל מערכת קואורדינטות אנחנו צריכים למצוא שלושה פרמטרים (או שניים בדו מימד) שיכולים להגדיר כל נקודה במרחב ובלתי תלויים אחד בשני.
מלבד המערכת הקרטזית (x, y, z) נשתמש בדרך כלל באחת משלוש מערכות הקואורדינטות הבאות:

קואורדינטות פולאריות עבור מערכת דו מימדית

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

שני הפרמטרים שלנו הם המרחק מראשית הצירים והזווית מציר ה־x.

$$\vec{r} = r\left(\cos\theta, \sin\theta\right) = r\hat{r}$$

עבור מערכת תלת מימדית ישנן שתי מערכות קואורדינטות נוספות

קואורדינטות גליליות

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

אנחנו משתמשים בקואורדינטיות הפולאריות ומשאירים את כיוון $\hat{z}$ כפי שהוא

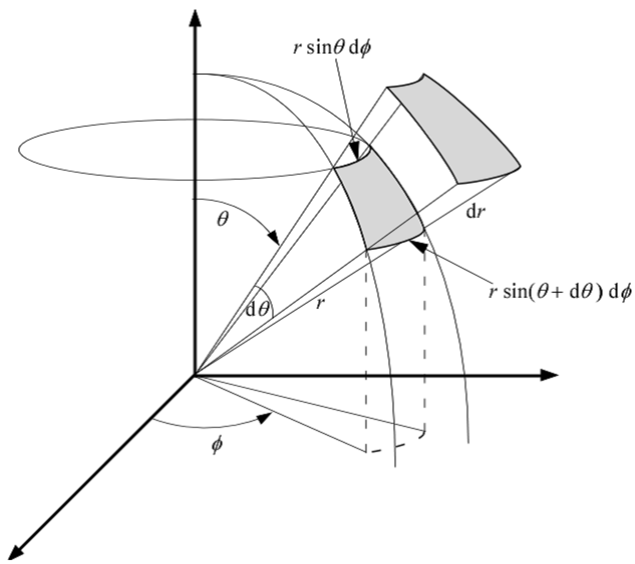
$$\vec{r} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

קואורדינטות ספריות

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

הפרמטרים הם המרחק מראשית הצירים, הזווית מציר ה־x והזווית מציר ה־z.

$$\vec{r} = r\left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right) = r\hat{r}$$



היעקוביאן

בעזרת מערכת הקוארדינטות אנחנו צריכים להגדיר יחידת נפח אינטיפיסימלית. אלא שבעוד במערכת הקרטזית זו פשוט מכפלת היחידות האינטיפסימליות של הקוארדינטות, במערכות אחרות יתכן שיש צורך במקדם נוסף.

$$dxdydz = Jd\alpha d\beta d\gamma$$

המקדם הזה הוא היעקוביאן וניתן לחשב אותו על ידי דטרמיננטת הנגזרות של הקוארדינטות הישנות לפי הקוארדינטות החדשות:

$$J = \left\|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial\alpha} & \frac{\partial x}{\partial\beta} & \frac{\partial x}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial\alpha} & \frac{\partial y}{\partial\beta} & \frac{\partial y}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial\alpha} & \frac{\partial z}{\partial\beta} & \frac{\partial z}{\partial\gamma} \end{array}\right\|$$

צריך לשים לב שהערך של היעקוביאן חייב להיות חיובי ולכן ניקח ערך מוחלט של הדטרמיננטה.
עבור המערכות שהגדרנו נקבל:
במערכת פולארית וגלילית $J = r$

$$J = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left|\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta\right| = \rho$$

במערכת ספרית $J = r^2\sin\theta$

$$J = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left|\cos\theta \left| \begin{matrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{matrix} \right| + r\sin\theta \left| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{matrix} \right| \right| =$$

$$= \left|r^2\cos\theta\left(\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right) + r^2\sin\theta\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\right)\right| = r^2\sin\theta$$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל הנתון על ידי שינוי משתני האינטגרציה:

$$\int\int_R \frac{(x-y)^2}{(2+x+y)^2} dxdy$$

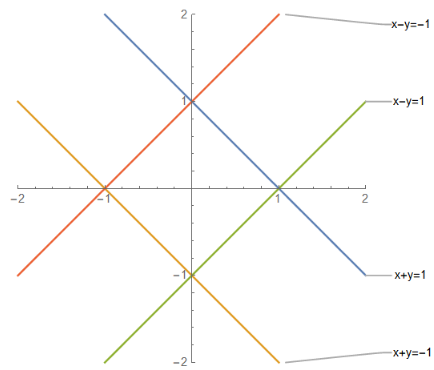
בתחום R המוגדר על ידי:

$$\begin{aligned} -1 < x+y < 1 \\ -1 < x-y < 1 \end{aligned}$$

פתרון

נשים לב שבלי החלפת משתני האינטגרציה הגבולות יהיו תלויים זה בזה בצורה לא נוחה

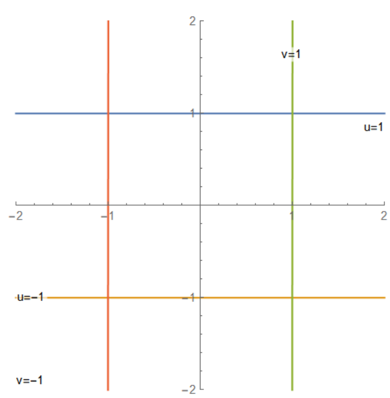
$$\int\int_R \frac{(x-y)^2}{(2+x+y)^2}dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1}\frac{(x-y)^2}{(2+x+y)^2}dxdy + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x}\frac{(x-y)^2}{(2+x+y)^2}dxdy$$



נחליף למשתנים הבאים:

$$u = x+y, \quad x = \frac{1}{2}(u+v)$$
$$v = x-y, \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

$$-1 < u < 1$$
$$-1 < v < 1$$



נחשב את היעקוביאן:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int\int_R \frac{(x-y)^2}{(2+x+y)^2} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{v^2}{(2+u)^2}\frac{1}{2} dvdu = \frac{1}{2}\left(\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)\left(-\frac{1}{2+u}\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{9}$$

תרגיל 3

חשבו את האינטגרל הגאוסי

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

פתרון

כדי לחשב את האינטגרל נעבוד בשני שלבים.
בשלב הראשון נעלה את האינטגרל בריבוע:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

כעת נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta =$$

$$2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\frac{dr^2}{2} = \pi\left(-e^{-r^2}\Big|_0^\infty\right) = \pi$$

ומכאן נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

תרגיל 4

חשבו את הנפח של קונוס בעל רדיוס בסיס R וגובה h.
חשבו את הנפח עבור אותו קונוס אילו היה קטום בגובה h_0.

פתרון

נמצא את הרדיוס של הקונוס כפונקציה של הגובה.
היחס בין הרדיוס של הבסיס לגובה הוא:

$$\frac{R}{h} = \tan\theta$$

כאשר θ היא זווית המפתח של הקונוס
עבור הרדיוס של הקונוס בגובה z נקבל:

$$\frac{\rho(z)}{h-z} = \tan\theta = \frac{R}{h}$$

$$\rightarrow \rho(z) = R - \frac{R}{h}z = R\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

נחשב את נפח הקונוס כאינטגרל בקואורדינטות גליליות עם הגבולות המתאימים:

$$V=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R\left(1-\frac{z}{h}\right)}rdr=2\pi\int_0^h dz\frac{R^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2}{2}=-\pi R^2h\frac{\left(1-\frac{z}{h}\right)^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h}{3}$$

עבור הקונוס הקטום נחשב את אותו אינטגרל ורק נשנה את הגבול העליון בציר z

$$V=\int_0^{h_0} dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R\left(1-\frac{z}{h}\right)}rdr=2\pi\int_0^h dz\frac{R^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2}{2}=-\pi R^2h\frac{\left(1-\frac{z}{h}\right)^3}{3}\Bigg|_0^{h_0}=\frac{\pi R^2h}{3}\left(1-\left(1-\frac{h_0}{h}\right)^3\right)$$

תרגיל 5

מעטפת של ביצה נתונה על ידי

$$r=a\left(2-\cos\theta\right)$$

חשב את מסתה אם נתון שצפיפות המסה שלה קבועה ρ_0

פתרון

צריך להבין שמסה של חפץ היא סכום המסה של כל היחידות הקטנות שלו, כלומר אינטגרל על כל הנפח כפול צפיפות המסה בנפח, לכן נעשה אינטגרל על צפיפות המסה

$$M=\int dm=\int\rho_0 dv=\rho_0\int_0^{a(2-\cos\theta)}dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi r^2\sin\theta=$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\int_0^{a(2-\cos\theta)}r^2dr=2\pi\rho_0\int_0^{\pi}\frac{a^3\left(2-\cos\theta\right)^3}{3}\sin\theta d\theta=$$

$$=2\pi\rho_0\int_{-1}^{1}\frac{a^3\left(2-\cos\theta\right)^3}{3}d\cos\theta=\frac{2\pi a^3\rho_0}{3}\left(-\frac{\left(2-\cos\theta\right)^4}{4}\Bigg|_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1}\right)=\frac{40\pi a^3\rho_0}{3}$$