תיאור עקומות במרחב

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ב, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

מסילות

ניתן לתאר עקומה במרחב באמצעות "מסילה" המתארת את מיקומי הנקודות על העקומה כפונקציה של פרמטר כלשהו t הגדל בצורה מונוטונית לאורך העקומה:

$$\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)) \qquad t_i \le t \le t_f \tag{1}$$

כאשר $\vec{r}(t_i)$ היא נקודת ההתחלה ו־$\vec{r}(t_f)$ היא נקודת הסיום. פרמטריזציה כזאת מופיעה באופן טבעי כשהעקומה מתארת מסלול של חלקיק במרחב, למשל. במקרה כזה ניתן לתאר את העקומה באמצעות ציון הקואורדינטות של החלקיק כפונקציה של הזמן t. אבל באופן כללי אין צורך בחלקיק אמיתי שיעבור לאורך העקומה לפי הזמנים האלה. נקבל תיאור של העקומה גם אם החלקיק הוא רק בדמיון שלנו. הפרמטר t הוא רק אמצעי "למספר" (בצורה רציפה) את הנקודות לאורך העקומה.

ברור שבחירת הפרמטר t לתיאור עקומה נתונה אינה יחידה: כל פונקציה מונוטונית $T(t)$ יכולה לשמש לפרמטריזציה של המסילה במקום t.

דוגמה לתיאור אותה עקומה במרחב באמצעות מסילות עם פרמטריזציות שונות (מסילות כאלה נקראות **מסילות שקולות**):

$$\vec{r}_1(t) = \left(t,\, t^2,\, 0\right) \qquad 1 \le t \le 4 \tag{2}$$

$$\vec{r}_2(t) = \left(t^2,\, t^4,\, 0\right) \qquad 1 \le t \le 2 \tag{3}$$

שתי המסילות מתארות אותה עקומה – הן מביאות אותנו מהנקודה $(1,1,0)$ אל הנקודה $(4,16,0)$ באותו המסלול בדיוק, כי הן מקיימות $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t^2)$. קל לראות שאת העקומה הספציפית הזאת ניתן לתאר בצורה פשוטה גם בלי פרמטריזציה – מדובר בסך הכל בפרבולה במישור xy:

$$y = x^2, \quad z = 0 \tag{4}$$

בתחום $1 \le x \le 4$. אבל עבור עקומות מסובכות יותר ולצורך פיתוחים כלליים, תיאור העקומה באמצעות מסילה עם פרמטר t הוא שימושי ביותר, כפי שנראה בקרוב.

וקטור המהירות לאורך המסילה מוגדר כ־

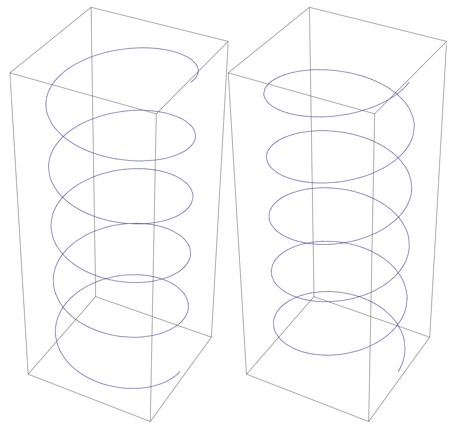
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t),\, \dot{y}(t),\, \dot{z}(t)) \tag{5}$$

וגודל **המהירות** $v(t) = |\vec{v}(t)|$. עבור שתי המסילות לעיל, וקטורי המהירות הם

$$\vec{v}_1(t) = (1,\, 2t,\, 0) \tag{6}$$

$$\vec{v}_2(t) = (2t,\, 4t^3,\, 0) \tag{7}$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.



איור 1: סליל שמאלי (שמאל) וימני (ימין). כיוון ההתקדמות של t הוא כלפי מעלה.

וגדלי המהירות

$$v_1(t) = \sqrt{1+4t^2} \tag{8}$$

$$v_2(t) = \sqrt{4t^2+16t^6} \tag{9}$$

חשוב לזכור שבאופן כללי הפרמטר t איננו זמן, ובדרך כלל אין לו משמעות פיזיקלית כלשהי, אלא הוא רק כלי לתיאור העקומה. בהתאם לכך, כשאנחנו מדברים כאן על מהירות, אין הכוונה לתיאור של תנועה פיזיקלית של חלקיק כלשהו, אלא מדובר בסך הכל באנלוגיה שתהיה שימושית עבורנו.

דוגמה לעקומות תלת־מימדיות: שני סלילים – סליל ימני $\vec{r}_R(t)$ וסליל שמאלי $\vec{r}_L(t)$ המוצגים באיור 1:

$$\vec{r}_R(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ ht) \tag{10}$$

$$\vec{r}_L(t) = (a\cos t,\ -a\sin t,\ ht) \tag{11}$$

מרחק לאורך העקומה

נרצה לחשב את המרחק לאורך עקומה נתונה בין שתי נקודות, A ו־B, הנמצאות על העקומה:

$$s_{AB} = \int_A^B |d\vec{r}| = \int_A^B \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \tag{12}$$

שימו לב שלמרות שמופיעים כאן שלושה דיפרנציאלים, dx, dy ו־dz, לא מדובר באינטגרל משולש, אלא אינטגרל חד־מימדי, כי השינויים ב־x, y, ו־z חייבים להיעשות בצורה מתואמת המוכתבת ע"י צורת העקומה.

יש מספר דרכים להביא את האינטגרל לצורה שבה אפשר לחשב אותו. למשל, אם יש בידינו

תיאור של העקומה במונחים של $y(x)$ ו־$z(x)$, נוכל לרשום את האינטגרל באופן הבא:

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2+\left(z'(x)\right)^2}\,dx \end{aligned} \tag{13}$$

קיבלנו אינטגרל לפי x בלבד שניתן לחשב אותו בשיטות הסטנדרטיות. לחלופין, ניתן באופן דומה לרשום את האינטגרל כאינטגרל לפי y אם ידועים לנו $x(y)$ ו־$z(y)$, או כאינטגרל לפי z אם ידועים לנו $x(z)$ ו־$y(z)$.

אם תיאור העקומה נתון ע"י מסילה עם פרמטר t, נוכל לחשב את המרחק באופן הבא:

$$s_{AB} = \int_A^B |d\vec{r}| = \int_{t_A}^{t_B} \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt \tag{14}$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{15}$$

או במילים אחרות

$$s_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} v(t)\,dt \tag{16}$$

מעניין לשים לב שבעוד ש"מהירות" $v(t)$ וה"זמן" t בנוסחה הזאת הם פיקטיביים, התוצאה s_{AB} היא מרחק פיזי, ללא מרכאות.

דוגמה: חשבו את אורך החוט הנדרש ליצירת הסליל האנכי שצורתו מתוארת על ידי

$$\vec{r}(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, ht)\,, \quad 0 \le t \le t_f \tag{17}$$

(כאשר a ו־h הם קבועים נתונים) אם נתון שגובהו H.

דרך 1: אורך החוט הנדרש הוא

$$\ell = \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t_f)} |d\vec{r}| = \int_0^{t_f} v(t)\,dt \tag{18}$$

ה"מהירות" היא

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-a\sin t,\, a\cos t,\, h)\,, \qquad v(t) = \sqrt{a^2+h^2} \tag{19}$$

לכן נקבל

$$\ell = \int_0^{t_f} \sqrt{a^2+h^2}\,dt = \sqrt{a^2+h^2}\,t_f = \sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}\,H \tag{20}$$

כאשר השתמשנו בכך ש־$z(t) = ht$ ולכן

$$t_f = \frac{H}{h} \tag{21}$$

דרך 2: בזכות הקשר הפשוט בין t ל־z, $z = ht$, נוכל בקלות לרשום את x ו־y כפונקציה של z:

$$x(z) = a\cos\left(\frac{z}{h}\right)\,, \quad y(z) = a\sin\left(\frac{z}{h}\right) \tag{22}$$

ולחשב את האורך באמצעות אינטגרל לפי z:

$$\ell = \int_0^H \sqrt{1 + \left(x'(z)\right)^2 + \left(y'(z)\right)^2}\, dz \tag{23}$$

$$= \int_0^H \sqrt{1 + \left(-\frac{a}{h}\sin\left(\frac{z}{h}\right)\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\cos\left(\frac{z}{h}\right)\right)^2}\, dz \tag{24}$$

$$= \int_0^H \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}}\, dz \tag{25}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}}\, H \tag{26}$$

פרמטריזציה טבעית: טבעי (ובמקרים מסוימים גם נוח) להשתמש ב־$s(t)$, המרחק הפיזי לאורך העקומה מתחילתה ועד לנקודה כללית,

$$s(t) = \int_{\vec{r}(t_i)}^{\vec{r}(t)} |d\vec{r}| = \int_{t_i}^{t} v(t')\, dt' \tag{27}$$

בתור פרמטר המסילה, במקום הפרמטר השרירותי t. הפרמטר s נקרא **פרמטר האורך** או **הפרמטר הטבעי**. ה"מהירות" עם פרמטריזציה כזו היא וקטור יחידה: $v(s) = |d\vec{r}/ds| = 1$.

דוגמה: מסילות על מעגל. ניקח מסילה מהצורה

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos\theta(t),\, \sin\theta(t),\, 0\right) \tag{28}$$

עם פונקציה $\theta(t)$ שרירותית. לא משנה האם $\theta(t) = t$ או $\theta(t) = \sqrt{1+t}$ או משהו אחר, המסילה תתאר עקומה מעגלית במישור xy עם רדיוס R ומרכז בראשית הצירים. עכשיו נראה איך ניתן לתאר את העקומה עם הפרמטריזציה הטבעית. לשם הפשטות, נניח ש־$\dot\theta(t) > 0$ לכל t (כלומר, תמיד מתקדמים בזווית). ה"מהירות" לאורך המסילה

$$\vec{v}(t) = R\dot\theta(t)\left(-\sin\theta(t),\, \cos\theta(t),\, 0\right) \tag{29}$$

$$v(t) = R\dot\theta(t) \tag{30}$$

מאפשרת לנו לחשב את פרמטר האורך

$$s(t) = \int_0^t R\,\dot\theta(t')\, dt' = R\,\theta(t) \tag{31}$$

כאשר הנחנו ש־$\theta(0) = 0$. נשים לב שאם $\theta(t)$ מגיעה לערך 2π מקבלים את היקף המעגל, $s = 2\pi R$, כמצופה. נוכל לתאר את העקומה (המעגל או חלק ממנו) במונחים של פרמטר האורך s במקום הפרמטר השרירותי t כך:

$$\vec{r}(s) = R\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right),\, \sin\left(\frac{s}{R}\right),\, 0\right) \tag{32}$$