מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 7

מסילות במרחב

ניתן לתאר עקומה במרחב באמצעות מסילה המתארת את מיקומי הנקודות שעל העקומה כפונקציה של פרמטר t הגדל מונוטונית לאורך העקומה

$$\vec{r}\left(t\right)=x\left(t\right)\hat{x}+y\left(t\right)\hat{y}+z\left(t\right)\hat{z},\quad t_i<t<t_f$$

כדי לתאר את התנועה לאורך המסילה נגדיר ווקטור "מהירות"

$$\vec{v}\left(t\right)=\dot{\vec{r}}\left(t\right)=\dot{x}\left(t\right)\hat{x}+\dot{y}\left(t\right)\hat{y}+\dot{z}\left(t\right)\hat{z}$$

$$v\left(t\right)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

פרמטיזציה שונה תשפיע על ווקטור המהירות אבל לא על אורך המסילה.
כדי לחשב את האורך של העקומה נחלק אותה לחלקים קטנים ונסכום על האורך של כל החלקים האלו

$$S=\int_a^b\left|d\vec{r}\left(t\right)\right|=\int_a^b\sqrt{\left(dx\left(t\right)\right)^2+\left(dy\left(t\right)\right)^2+\left(dz\left(t\right)\right)^2}$$

כדי לחשב את האינטגרל נעבור לאינטגרל על הפרמטר t , כאשר $\vec{r}\left(t_i\right)=a,\vec{r}\left(t_f\right)=b$

$$S=\int_{t_i}^{t_f}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt=\int_{t_i}^{t_f}v\left(t\right)dt$$

שימו לב שהפרמטר יכול להיות גם אחת מקואורדינטות המיקום עצמן, אם הקואורדינטות האחרות תלויות בה.

תרגיל 1

חשבו את אורך העקומה

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \ln(\cos t)) \,, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$$

פתרון

נחשב את אורך העקומה

$$\begin{aligned}
S =& \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} dt \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \\
=& \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-u+1+u}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \\
=& \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| = \ln\left|1+\sqrt{2}\right|
\end{aligned}$$

תרגיל 2

מהו אורך הפרבולה

$$y = x^2$$

בתחום $0 \leq x \leq 1$

פתרון

העקומה היא מהצורה

$$\vec{r}(t) = \left(t, t^2, 0\right)$$

נזכור כי לפי כלל השרשרת: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$
נכתוב מחדש:

$$S=\int_{t_i}^{t_f}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_{t_i}^{t_f}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2}dt=\int_{x(t_i)}^{x\left(t_f\right)}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
s=&\int\limits_0^1\sqrt{1+4x^2}dx\quad\{2x=\sinh\left(z\right);\quad 2dx=\cosh\left(z\right)dz\}\\
=&\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sinh^{-1}(2)}\cosh^2\left(z\right)dz=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\sinh^{-1}(2)}\left(\cosh\left(2z\right)+1\right)dz=\frac{1}{4}\left[\frac{\sinh\left(2z\right)}{2}+z\right]\Bigg|_0^{\sinh^{-1}(2)}\\
=&\frac{1}{4}\left[\frac{\sinh\left(2\sinh^{-1}(2)\right)}{2}+\sinh^{-1}(2)\right]=\frac{1}{4}\left[2\cosh\left(\sinh^{-1}(2)\right)+\sinh^{-1}(2)\right]\\
=&\frac{1}{4}\left[2\sqrt{1+\sinh^2\left(\sinh^{-1}(2)\right)}+\sinh^{-1}(2)\right]=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{5}+\sinh^{-1}(2)\right]
\end{aligned}$$

תרגיל 3

סליל אנכי מתואר על ידי

$$\vec{r}(t)=\left(a\sin t,\ a\cos t,\ ht\right)$$

כאשר a ו־h הם קבועים נתונים. נמלה זוחלת על הסליל במהירות קבועה v.
כמה זמן לוקח לה לעשות סיבוב אחד

פתרון

נגדיר שהזמן שלוקח לנמלה לעבור סיבוב אחד הוא T.
כדי לחשב את האורך של המסלול לאורך סיבוב אחד נחשב את $v\left(t\right)$, (שימו לב, זו לא המהירות של הנמלה אלא השינוי של המיקום על המסילה כתלות בפרמטר t)

$$
\begin{aligned}
v\left(t\right) =& \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{2}+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^{2}}\\
=& \sqrt{a^{2}\cos^{2}\left(t\right)+a^{2}\sin^{2}\left(t\right)+h^{2}}\\
=& \sqrt{a^{2}+h^{2}}
\end{aligned}
$$

במהלך סיבוב אחד הפרמטר t משתנה כך ש $t_i = 0, t_f = 2\pi$
האורך של המסילה שהנמלה עוברת במהלך סיבוב אחד הוא

$$S = \int_{t_i}^{t_f} v\left(t\right)dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^{2}+h^{2}}dt = 2\pi\sqrt{a^{2}+h^{2}}$$

מכיוון שהמהירות שלה היא קבועה v הזמן שייקח לה לעבור סיבוב אחד הוא

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2\pi\sqrt{a^{2}+h^{2}}}{v}$$

אנליזה ווקטורית - גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

עבור הגדרת האופרטורים ניזכר באופרטור הגזירה במערכת קואורדינטות קרטזית:

$$\vec{\nabla} = \left(\partial_x, \partial_y, \partial_z\right) = \partial_i \hat{x}_i$$

איתו הגדרנו את הגרדיאנט על פונקציה סקלרית ϕ:

$$\vec{\nabla}\phi = \partial_x\phi\hat{x} + \partial_y\phi\hat{y} + \partial_z\phi\hat{z} = \partial_i\phi\hat{x}_i$$

באותו אופן נגדיר את הדיברגנץ על פונקציה ווקטורית $\vec{F}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = \partial_i F_i$$

$\vec{F}$ הינו שדה ווקטורי, נזכור כי אם $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ בכל נקודה אזי $\vec{F}$ חסר מקורות. הדיברגנץ הינו מדד לכמה השדה הווקטורי מתרחב בנקודה מסויימת.
נגדיר את הרוטור:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

או לפי אינדקס מסויים:

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right]_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j F_k$$

הרוטור הוא מדד למערבולתיות השדה.
נגדיר את הלפלסיאן על שדה סקלרי:

$$\vec{\nabla}^2\phi=\Delta\phi=\partial_x^2\phi+\partial_y^2\phi+\partial_z^2\phi=\partial_i\partial_i\phi$$

תרגיל 4

מצאו ביטוי לרוטור של שדה סקלרי כפול שדה ווקטורי

$$\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{F}\right)$$

פתרון

המכפלה הווקטורית תיתן לנו ווקטור לכן נתבונן לפי רכיבים:

$$\begin{aligned}\left[\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{F}\right)\right]_i=&\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\phi\vec{F}\right)_k=\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\phi F_k\right)=\\ =&\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j\phi\right)F_k+\phi\varepsilon_{ijk}\partial_j F_k=\\ =&\left[\left(\vec{\nabla}\phi\right)\times\vec{F}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{F}\right]_i\end{aligned}$$

לכן

$$\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{F}\right)=\left(\vec{\nabla}\phi\right)\times\vec{F}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

תרגיל 5

הוכיחו את הזהות עבור שדה וקטורי:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)$$

פתרון

נתבונן לפי איברים:

$$\begin{aligned}\left[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]_i =& \varepsilon_{ijk}\partial_j \left(\varepsilon_{k\ell m}\partial_\ell A_m\right) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}\partial_j\partial_\ell A_m \\ &= \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right)\partial_j\partial_\ell A_m = \partial_j\partial_i A_j - \partial_j\partial_j A_i = \partial_i\partial_j A_j - \partial_j\partial_j A_i \\ &= \left[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\right]_i\end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)$$