מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 9

אינטגרל משטחי

אינטגרל משטחי של פונקציה סקלרית הוא אינטגרל מהצורה

$$\iint_S g(\vec{r})\, dS$$

כאשר S הוא משטח עקום כלשהו מעל מישור $x-y$.
על מנת לחשב אותו נגדיר את המשטח כפונקציה של x, y

$$z = f(x, y)$$

אם נתבונן בנקודה $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ שעל המשטח נקבל שתנועה קטנה על פני המשטח בכיוון x תהיה על פי הגדרה

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx = \vec{u} dx$$

ובכיוון y

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = \vec{v} dy$$

לכן יחידת השטח שלנו תהיה

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy \right| = |\vec{u} \times \vec{v}|\, dxdy = \left| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

ומכאן נקבל

$$\iint_S g(\vec{r})\,dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

כאשר D הוא ההיטל של S על מישור $x-y$

תרגיל 1

חשבו את שטח מעטפת הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ מהראשית עד גובה $z=3$

פתרון

נחשב את האינטגרל

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

כאשר $f=x^2+y^2$ והתחום D הוא המעגל במישור $x-y$ התחום על ידי $x^2+y^2=3$

$$=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

נעבור לקוארדינטות פולאריות

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}drr\sqrt{1+4r^2} =& \pi\int_0^3 du\sqrt{1+4u}\\ =&\pi\frac{2}{12}\left(1+4u\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{\pi}{6}\left(13^{\frac{3}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

תרגיל 2

חשבו את האינטגרל של הפונקציה $g(x,y,z)=z^2+x$ על גבי משטח $x^2+y^2+z^2=4$ בחלק בו $z>0$

פתרון

נגדיר את z כפונקציה של המשתנים האחרים כדי להגדיר את המשטח

$$z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

הגבול של המשטח הוא כאשר $z=0$ ואז נקבל

$$x^2+y^2=4$$

נחשב את האינטגרל

$$\begin{aligned}
\iint_S g(x,y,z)\,dS &= \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy \\
&= \iint_D \left(4-x^2-y^2+x\right)\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 drr\left(4-r^2+r\cos\theta\right)\frac{2}{\sqrt{4-r^2}} \\
&=2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 drr\sqrt{4-r^2}+2\int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\int_0^2 drr^2\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}
\end{aligned}$$

האינטגרל השני מתאפס כי $\sin\theta|_0^{2\pi}=0$
ונקבל

$$=2\pi\int_0^4 du\sqrt{4-u} = -2\pi\frac{2}{3}\left(4-u\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}\pi$$

שטף של שדה ווקטורי

כאשר אנחנו עושים אינטגרל משטחי על פונקציה ווקטורית אנחנו מגדירים את השטף של השדה דרך המשטח

$$\Phi = \iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

כדי לחשב את השטף דרך המשטח צריך לזכור שרק הרכיב של השדה המאונך למשטח עובר דרך המשטח ולכן נכפיל את השדה בנורמל למשטח $d\vec{S}$. נשים לב שכדי לחשב את אלמנט השטח הגדרנו שני ווקטורים שמגדירים את המשטח ולכן הנורמל יהיה

$$\vec{n}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

ומכאן

$$\Phi=\iint_S\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{n}\left(\vec{r}\right)dS$$

שימו לב שנצטרך לבחור את האורנטציה של המשטח, לאיזה כיון השטף יהיה חיובי ולאיזה שלילי לפי הסימן של הנורמל של המשטח.
כדי לחשב את האינטגרל נטיל אותו שוב על מישור $x-y$, נשים לב שהנרמול של הנורמל מתבטל עם אלמנט השטח של המשטח

$$\vec{n}\left(\vec{r}\right)dS=\frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)dxdy=d\vec{S}$$

$$\Phi=\iint_D\vec{F}\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)dxdy$$

תרגיל 3

חשבו את השטף של הפונקציה $\vec{F}\left(x,y,z\right)=\left(-x,\frac{1}{y(1+z)},2y^2\right)$ דרך מעטפת הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ מהראשית עד גובה $z=3$

פתרון

נחשב את האינטגרל

$$\iint_S\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{n}\left(\vec{r}\right)dS=\iint_D\vec{F}\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)dxdy$$

כאשר $f = x^2 + y^2$ והתחום D הוא המעגל במישור $x - y$ התחום על ידי $x^2 + y^2 = 3$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D \left(-x, \frac{1}{y\left(1+x^2+y^2\right)}, 2y^2\right) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dxdy \\
&= \iint_D \left(2x^2 - \frac{2}{1+x^2+y^2} + 2y^2\right) dxdy
\end{aligned}
$$

נעבור לקוארדינטות פולאריות

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} drr \left(2r^2 - \frac{2}{1+r^2}\right) =& 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} drr^3 - 2\pi \int_0^3 du \frac{1}{1+u} \\
=& 9\pi - 2\pi \ln|4| = 9\pi - 4\pi \ln|2|
\end{aligned}
$$

משפט סטוקס

שטף הרוטור של השדה דרך משטח S דו מימדי שווה לאינטגרל המסילתי של השדה לאורך המסילה C התוחמת את המשטח:

$$
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n} dS
$$

$\hat{n}$ הוא ווקטור יחידה הניצב למשטח S, כיוונו נקבע ביחס לאורינטציה של המסילה, לפי כלל יד ימין. זאת בתנאי שהשדה רציף וגזיר בתוך התחום המוגדר ע"י C וכן שתחום זה הינו פשוט קשר.
במקרה הדו מימדי (בו לא ניתן להגדיר רוטור לפונקציה) המשפט נקרא משפט גרין.

משפט גרין

$$
\oint_C \left(F_x dx + F_y dy\right) = \iint_S \left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right) dxdy
$$

נדגיש כי לפי הכתיבה הנ"ל המסילה C הינה בכיוון החיובי, נגד כיוון השעון, אחרת יופיע מינוס באגף ימין.

תרגיל 4

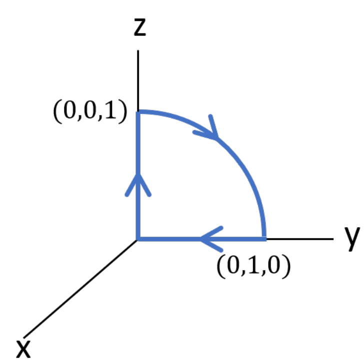
חשבו את האינטגרל

$$\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

של הפונקציה $\vec{F}=(y,z,x)$ לאורך המסילה C המתארת רבע מעגל במישור $y-z$ ברדיוס 1.
$C:(0,0,0)\to(0,0,1)\to(0,1,0)\to(0,0,0)$

1. ישירות
2. באמצעות משפט סטוקס

פתרון



1. כדי לחשב את האינטגרל ישירות נחלק את המסילה לשלוש, שני קווים ישרים ורבע מעגל

$$\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1 F_z(0,0,z)\,dz+\int_{C_1}\vec{F}(0,y,z)\cdot d\vec{r}+\int_1^0 F_y(0,y,0)\,dy$$

נחשב את שני הקווים הישרים:

$$\int_0^1 F_z(0,0,z)\,dz+\int_1^0 F_y(0,y,0)\,dy=\int_0^1 0dz+\int_1^0 0dy=0$$

עבור רבע המעגל נבחר פרמטריזציה

$$\vec{r} = (0, \sin(t), \cos(t)), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (0, \cos(t), -\sin(t))$$

$$\vec{F} = (\sin(t), \cos(t), 0)$$

ומכאן:

$$\int_{C_1} \vec{F}(0, y, z) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t), \cos(t), 0) \cdot (0, \cos(t), -\sin(t))\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))\, dt = \frac{\pi}{4} + \left.\frac{\sin(2t)}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. נשתמש במשפט סטוקס

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n} dS$$

נחשב את הרוטור

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

הנורמל שלנו הוא $\hat{n} = -\hat{x}$.
ומכאן:

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n} dS = \iint_S (-1, -1, -1) \cdot (-1, 0, 0)\, dS = \iint_S dS$$

וקיבלנו שטח של רבע עיגול ברדיוס 1.

$$\iint_S dS = \frac{\pi}{4}$$

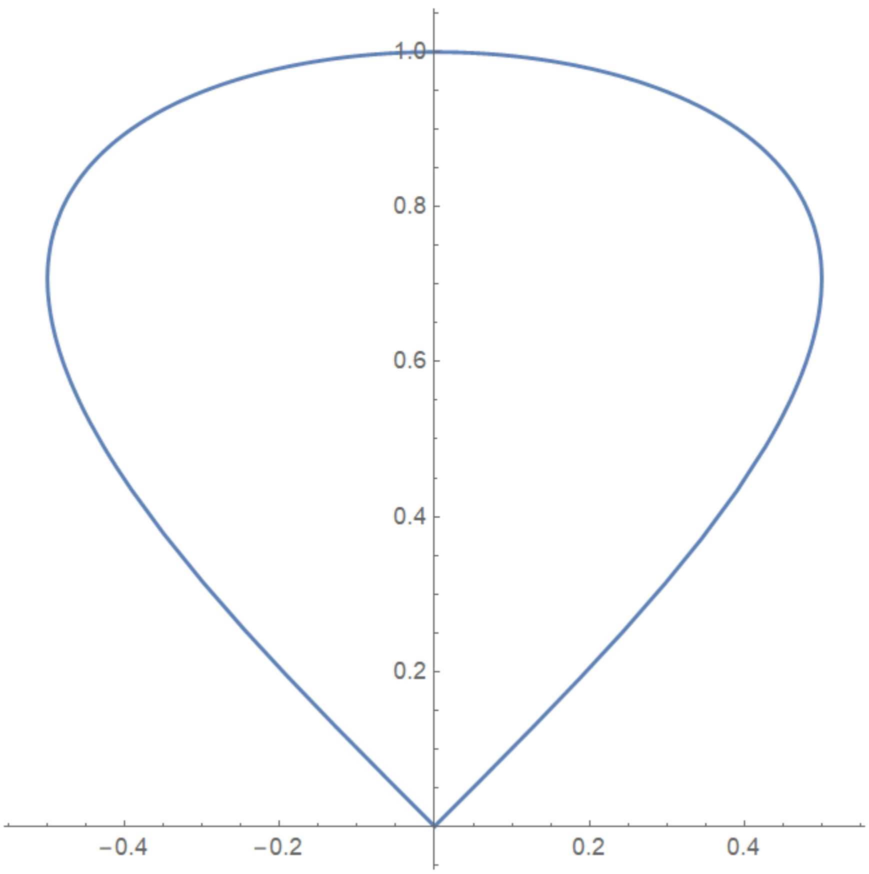
תרגיל 5

חשבו את שטח הצורה הנתונה על ידי:

$$\begin{matrix} x = \frac{1}{2}\sin(2t) \\ y = \sin(t) \end{matrix} \qquad 0 \le t \le \pi$$

פתרון

נצייר את התחום:



קשה לחשב את השטח של הצורה הזו, נשתמש במשפט גרין כדי לעשות זאת, בשביל זה צריך לקשר אותו לחישוב השטח:

$$S = \iint dS = \iint\limits_S dxdy$$

כדי להשתמש במשפט גרין נרצה לבחור פונקציה שעבורה $\partial_x F_y - \partial_y F_x = 1$ (לחילופין נוכל להשתמש במשפט סטוקס כאשר $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{z}$, $\hat{z}$ הוא הנורמל למשטח $dxdy$ ו $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$)
לצורך כך נבחר את הפונקציה $\vec{F} = (0, x)$ (כמובן שיכולות להיות פונקציות אחרות)
על פי משפט גרין:

$$\iint\limits_S (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\, dxdy = \oint\limits_C (F_x dx + F_y dy) = \oint\limits_C xdy$$

נחשב את האינטגרל המסילתי:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \sin(2t) \\ y &= \sin(t) \end{aligned}$$

$$dy = \cos(t)\, dt$$

$$\oint\limits_C xdy = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(2t) \cos(t)\, dt = \int_0^\pi \sin(t) \cos^2(t)\, dt =$$

$$\int_{-1}^{1} u^2 du = \left. \frac{u^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

צריך לשים לב שהלולאה שלנו היא נגד כיוון השעון, אם היא היתה עם כיוון השעון היינו צריכים להוסיף מינוס במעבר לאינטגרל המסילתי.