

סיבובים וטנזורים

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ב, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

מטריצות

מטריצה¹ מסדר $m \times n$ היא מערך דו-מימדי עם m שורות ו- n עמודות:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots \\ M_{21} & M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_n \Bigg\} m \quad (1)$$

הרכיב בשורה ה- i והעמודה ה- j של מטריצה M מסומן M_{ij} .

פעולות על מטריצות

1. כפל במספר: $(cM)_{ij} = cM_{ij}$

2. חיבור מטריצות (מאותו סדר): $(M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$

3. שיחלוף (transpose):

$$M^T = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots \\ M_{21} & M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_m \Bigg\} n \quad (2)$$

ברכיבים, המטריצה המשוחלפת ניתנת על ידי $(M^T)_{ij} = M_{ji}$.

4. כפל מטריצות: ניתן להכפיל מטריצה A מסדר $m \times n$ במטריצה B מסדר $n \times \ell$ ולקבל מטריצה C מסדר $m \times \ell$

$$C = AB \quad (3)$$

שרכיביה

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} = A_{ij} B_{jk} \quad (4)$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.
¹נושא המטריצות נלמד בפירוט בקורסים של אלגברה ליניארית. כאן אנחנו רק נסכם את עיקרי הדברים שיהיו רלוונטיים לנו. ניתן לקרוא עליו גם בפרק 8 של הספר הבא שקישור אליו נמצא באתר הקורס:
Mathematical Methods for Physics and Engineering, K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5} = \begin{pmatrix} 16 & 36 & 34 & 32 & 32 \\ 14 & 34 & 46 & 28 & 38 \\ 22 & 54 & 76 & 44 & 62 \end{pmatrix}_{3 \times 5}$$

איור 1: כפל מטריצות.

כפל מטריצות הוא פעולה דיסטריוטיבית (חוק הפילוג)

$$A(B + C) = AB + AC \quad (5)$$

אסוציאטיבית (חוק הקיבוץ)

$$A(BC) = (AB)C \quad (6)$$

אך בדרך כלל לא קומוטטיבית (לא חלופית)

$$AB \neq BA \quad (7)$$

פעולת השחלוף פועלת על המכפלה כך:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (8)$$

מטריצות ריבועיות ($n \times n$)

קיימת מטריצת יחידה I המוגדרת על ידי

$$MI = IM = M \quad (9)$$

או בכתיב האינדקסים

$$M_{ij}I_{jk} = I_{ij}M_{jk} = M_{ik} \quad (10)$$

מטריצה זו היא

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (11)$$

ולפעמים כותבים אותה בכתיב האינדקסים כ- δ_{ij} (הדלתא של קרונקר, שכבר פגשנו).

למטריצה M קיימת מטריצה הופכית M^{-1} המקיימת

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I \quad (12)$$

אם $\det M \neq 0$ הדטרמיננטה של מטריצה מסדר 2×2 נתונה על ידי

$$\det M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \quad (13)$$

למטריצה מסדר 3×3 (ובאופן דומה למטריצות גדולות יותר) נחשב לפי האלגוריתם הבא:

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} \\ &= M_{11} \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} - M_{12} \begin{vmatrix} M_{21} & M_{23} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} + M_{13} \begin{vmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

ניתן לבדוק בקלות שלמטריצה מסדר 2×2 המטריצה ההופכית היא

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \quad (15)$$

למטריצה מסדר 3×3 :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} M_{21} & M_{23} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{21} & M_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (16)$$

ובאופן כללי:

$$(M^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det M} \det \tilde{M}_{ji} \quad (17)$$

כאשר \tilde{M}_{ji} היא המטריצה המתקבלת מ- M אחרי מחיקת השורה ה- j והעמודה ה- i .

מטריצה ריבועית נקראת **אורתוגונלית** אם $M^T = M^{-1}$.

שילוב וקטורים ומטריצות

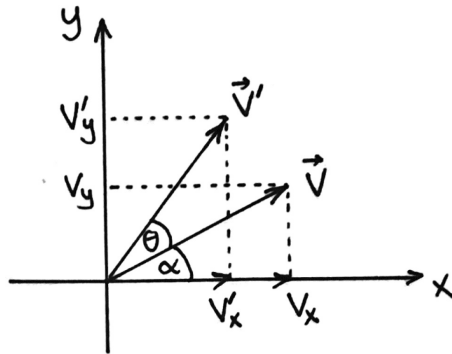
ניתן לתאר וקטור $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ כמטריצה מסדר 3×1 ("וקטור עמודה")

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

ניתן גם לתאר את אותו הווקטור כמטריצה מסדר 1×3 ("וקטור שורה") ואז נסמנו \vec{v}^T :

$$\vec{v}^T = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \quad (19)$$

²אפשר לחשוב על וקטור העמודה \vec{v} כמטריצה v_{i1} ועל וקטור השורה \vec{v}^T כמטריצה v_{j1} כאשר i ו- j רצים בין 1 ל-3 ומתאימים לשלושת רכיבי הווקטור המקורי.



איור 2: סיבוב אקטיבי.

את המכפלה הסקלרית, לדוגמה, ניתן לכתוב

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (20)$$

כפל המטריצות עשה כאן את המכפלה הסקלרית. באופן דומה, אפשר להכפיל מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$ בווקטור (מסדר $n \times 1$) ולקבל וקטור (מסדר $n \times 1$)

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + M_{12}v_2 + M_{13}v_3 \\ M_{21}v_1 + M_{22}v_2 + M_{23}v_3 \\ M_{31}v_1 + M_{32}v_2 + M_{33}v_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

באמצעות הסכם הסכימה נוכל לכתוב זאת כ-

$$w_i = M_{ij} v_j \quad (22)$$

סיבובים במרחב

נגדיר **סיבוב אקטיבי** כסיבוב פעיל של כל תוכן המרחב. נגדיר **סיבוב פסיבי** כסיבוב של מערכת הצירים.

סיבובים אקטיביים בשני מימדים

נוכל להציג סיבובים במרחב באמצעות מטריצות. למשל, נסתכל על וקטור כללי $\vec{v} = (v_x, v_y)$ ועל גרסתו המסובבת בזווית θ נגד כיוון השעון, $\vec{v}' = (v'_x, v'_y)$. אם כיוונו של \vec{v} הוא בזווית α ביחס לציר ה- x (איור 2), כך שרכיביו הם

$$v_x = v \cos \alpha \quad (23)$$

$$v_y = v \sin \alpha \quad (24)$$

הרכיבים של הווקטור המסובב יהיו

$$\begin{aligned} v'_x &= v \cos(\alpha + \theta) \\ &= v (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) \\ &= v_x \cos \theta - v_y \sin \theta \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} v'_y &= v \sin(\alpha + \theta) \\ &= v (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \\ &= v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

נוכל לכתוב זאת בכתוב מטריוני כד:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \equiv R(\theta) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (27)$$

או

$$\vec{v}' = R(\theta) \vec{v} \quad (28)$$

כאשר $R(\theta)$ נקראת **מטריצת סיבוב**. נשים לב שאיננה תלויה בפרטים של הווקטור. כל הווקטורים יסובבו עם אותה המטריצה.

סיבוב בכיוון השעון יתואר כסיבוב בזווית $-\theta$. נשים לב שזוהי המטריצה המשוחלפת

$$R(-\theta) = R^T(\theta) \quad (29)$$

מכאן רואים שמטריצות סיבוב הן מטריצות אורתוגונליות:

$$R^T(\theta) = R^{-1}(\theta) \quad (30)$$

הדבר נכון למטריצות סיבוב בכל מספר של מימדים ומבטיח שמכפלה סקלרית של וקטורים לא משתנה תחת סיבוב:

$$\vec{u}'^T \vec{v}' = (R(\theta) \vec{u})^T R(\theta) \vec{v} = \vec{u}^T R^T(\theta) R(\theta) \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} \quad (31)$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו באורתוגונליות של $R(\theta)$ ובכך ש- $R^{-1}(\theta)R(\theta) = I$.

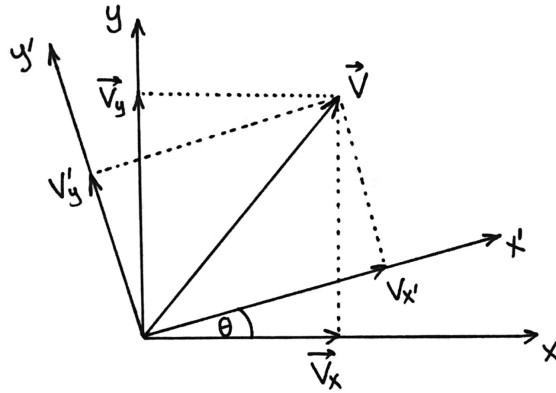
בנוסף, כפי שניתן לבדוק בקלות, בשני מימדים מטריצות הסיבוב הן חילופיות:

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2) \quad (32)$$

סיבובים פסיביים (סיבוב מערכת הצירים) בשני מימדים

נניח שיש לנו מערכת צירים x, y ואנחנו מסובבים אותה בזווית θ נגד כיוון השעון ל- x', y' (איור 3). איך נתאר את אותו וקטור \vec{v} בשתי מערכות הצירים? במערכת הצירים המקורית נכתוב

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} \quad (33)$$



איור 3: סיבוב פסיבי.

קעת נטיל את $\vec{v}_x \equiv v_x \hat{x}$ ואת $\vec{v}_y \equiv v_y \hat{y}$ על הצירים x', y' :

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad (34)$$

$$= v_x (\cos \theta \hat{x}' - \sin \theta \hat{y}') + v_y (\sin \theta \hat{x}' + \cos \theta \hat{y}') \quad (35)$$

$$= (v_x \cos \theta + v_y \sin \theta) \hat{x}' + (-v_x \sin \theta + v_y \cos \theta) \hat{y}' \quad (36)$$

קיבלנו אם כן

$$v_{x'} = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \quad v_{y'} = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \quad (37)$$

נוכל לכתוב זאת בכתוב מטריוני כד:

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = R^T(\theta) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (38)$$

או

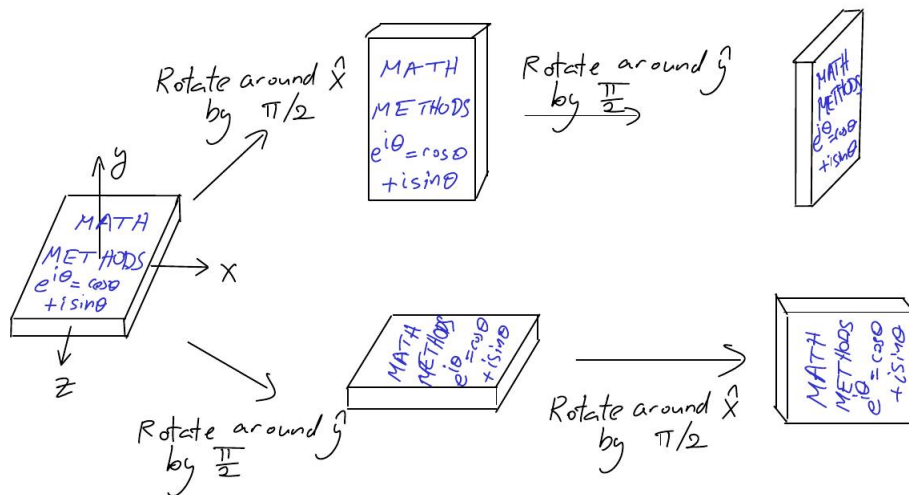
$$\vec{v}' = R^T(\theta) \vec{v} \quad (39)$$

כפי שניתן היה לצפות, בסיבוב פסיבי (סיבוב של מערכת הצירים, בעוד שהווקטור נשאר קבוע) באווית θ , רכיבי הווקטור משתנים כמו בסיבוב אקטיבי של הווקטור (עם מערכת צירים שנשארת קבועה) באווית $-\theta$.

סיבובים בשלושה מימדים

נשים לב שסיבוב סביב ציר ה- \hat{z} משאיר כל רכיב בכיוון זה קבוע, ולכן מטריצת הסיבוב בשלושה מימדים סביב ציר ה- \hat{z} (נגד כיוון השעון במישור xy) היא

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$



איור 4: סיבובים אינם מתחלפים.

על ידי פרמוטציה ציקלית נקבל גם

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (41)$$

סיבובים סביב צירים שונים אינם מתחלפים בדרך כלל. למשל, כפי שמודגם באיור 4,

$$R_x(\theta_1)R_y(\theta_2) \neq R_y(\theta_2)R_x(\theta_1) \quad (42)$$

הם כן מתחלפים בגבול של זוויות קטנות, $\theta_i \ll 1$. לדוגמה:

$$R_x(\theta_1)R_y(\theta_2) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$R_y(\theta_2)R_x(\theta_1) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

כאשר הזנחנו איברים מסדר שני ב- θ_i .

סקלרים, וקטורים וטנזורים אחרים

כעת אנחנו יכולים לתת הגדרה מדויקת לטנזורים מדרגות שונות שהזכרנו מוקדם יותר בקורס (בפרק "וקטורים").

סקלר (טנזור מדרגה 0) מוגדר כמספר שאינו משתנה תחת סיבוב מערכת הצירים:

$$s' = s \quad (45)$$

וקטור (טנזור מדרגה 1) הוא אובייקט שרכיביו משתנים לפי

$$\vec{v}' = R^T \vec{v} \quad (46)$$

כאשר R היא המטריצה המתארת את סיבוב מערכת הצירים. כדאי לכתוב זאת גם בכתב האינדקסים

$$v'_i = R_{ij}^T v_j \quad (47)$$

כי כך הקשר עם טנזורים מדרגות גבוהות יותר יהיה יותר ברור.

טנזור מדרגה 2 הוא אובייקט שרכיביו T_{ij} משתנים לפי

$$T'_{ij} = R_{i\ell}^T R_{jm}^T T_{\ell m} \quad (48)$$

כאשר R^T היא אותה המטריצה שמתארת את הטרנספורמציה של רכיבי וקטורים ב-(47).

נשים לב שהטרנספורמציה של T_{ij} היא כמו של מכפלה של רכיבי שני וקטורים:

$$v'_i w'_j = R_{i\ell}^T R_{jm}^T v_\ell w_m \quad (49)$$

כמובן, האובייקט $T_{ij} = v_i w_j$ הוא עצמו טנזור מדרגה 2. מכל שני וקטורים ניתן ליצור טנזור מדרגה 2 באמצעות **מכפלה טנזורית** כזאת, שלפעמים כותבים אותה $T = \vec{v} \otimes \vec{w}$.

אם רוצים, אפשר להסתכל על טנזור T_{ij} כמטריצה⁴ ולרשום את הטרנספורמציה שלו כך:

$$T' = R^T T R \quad (51)$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $T'_{ij} = R_{i\ell}^T R_{jm}^T T_{\ell m} = R_{i\ell}^T T_{\ell m} R_{mj}$

טנזור מדרגה 3 הוא אובייקט שרכיביו T_{ijk} משתנים לפי

$$T'_{ijk} = R_{i\ell}^T R_{jm}^T R_{kn}^T T_{\ell mn} \quad (52)$$

וכן הלאה.

³ביתר פירוט, נוכל לכתוב

$$T'_{ij} = \left(R_{\hat{n}}^T(\theta) \right)_{i\ell} \left(R_{\hat{n}}^T(\theta) \right)_{jm} T_{\ell m}$$

כאשר וקטור היחידה \hat{n} מציין את ציר הסיבוב ו- θ את זווית הסיבוב של מערכת הצירים.
⁴אם הטנזור הוא מכפלה טנזורית של שני וקטורים, $T_{ij} = v_i w_j$, אז מדובר במטריצה

$$T = \vec{v} \otimes \vec{w} = \vec{v} \vec{w}^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

דוגמה: טנזור האינרציה

דוגמה פיזיקלית לטנזור מדרגה 2 היא טנזור האינרציה (טנזור ההתמד) של גוף קשיח, הנתון על ידי

$$I_{ij} = \iiint \rho(\vec{r}) (\delta_{ij} r_k r_k - r_i r_j) dV = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} r_{\alpha,k} r_{\alpha,k} - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}) \quad (53)$$

כאשר וקטורי המיקום \vec{r} הם ביחס למרכז המסה של הגוף או ביחס לנקודה קבועה סביבה הגוף מסתובב, בהתאם להקשר. הביטוי הראשון רשום במונחים של צפיפות המסה בגוף, $\rho(\vec{r})$, והביטוי השני במונחים של מסות נקודתיות m_{α} הממוקמות בנקודות \vec{r}_{α} , אשר מרכיבות את הגוף.

טנזור האינרציה מאפשר לבטא את התנע הזוויתי \vec{L} (ביחס למרכז המסה או לנקודה הקבועה) ואת האנרגיה הקינטית E_K של התנועה הסיבובית כפונקציה של המהירות הזוויתית $\vec{\omega}$:

$$L_i = I_{ij} \omega_j, \quad E_K = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (54)$$

נשים לב שמשוואות אלה משלבות טנזורים מדרגות שונות: טנזור האינרציה (שדרגתו 2), הווקטורים $\vec{\omega}$ ו- \vec{L} (שהם טנזורים מדרגה 1), והסקלר E_K (טנזור מדרגה 0). הדבר מתאפשר בזכות כך שהטרנספורמציה של כל הטנזורים מתבצעת על ידי אותה מטריצת סיבוב. נסתכל למשל על הטרנספורמציה של L_i :

$$L'_i = I'_{ij} \omega'_j = R_{il}^T R_{jm}^T I_{lm} R_{jk}^T \omega_k = R_{il}^T R_{mj} R_{jk}^T I_{lm} \omega_k = R_{il}^T I_{lk} \omega_k = R_{il}^T L_l \quad (55)$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $\delta_{mk} = R_{mj} R_{jk}^T$ מפני שמטריצות הסיבוב הן אורתוגונליות. הראינה, אם כן, שתכונות הטרנספורמציה של הטנזור I_{ij} והווקטור $\vec{\omega}$ קונסיסטנטיות עם היותו של \vec{L} וקטור. באופן דומה נראה ש- E_K היא סקלר:

$$\begin{aligned} E'_K &= \frac{1}{2} I'_{ij} \omega'_i \omega'_j = \frac{1}{2} R_{il}^T R_{jm}^T I_{lm} R_{ir}^T \omega_r R_{js}^T \omega_s \\ &= \frac{1}{2} (R_{li} R_{ir}^T) (R_{mj} R_{js}^T) I_{lm} \omega_r \omega_s = \frac{1}{2} I_{lm} \omega_l \omega_m = E_K \end{aligned} \quad (56)$$

טנזורים אינווריאנטיים

מכיוון שניתן לשנות את רכיביו של כל וקטור נתון (פרט לווקטור האפס) ע"י סיבוב מערכת הצירים, ואין מערכת צירים נבחרת בעולם שלנו, וקטורים תמיד מופיעים בחוקי הפיזיקה היסודיים כגדלים דינמיים, שרכיביהם יכולים לקבל ערכים שונים בסיטואציות שונות. במילים אחרות, בחוקי הפיזיקה היסודיים אין "קבועים וקטוריים".

עבור טנזורים מדרגות גבוהות יותר, המצב יכול להיות יותר מעניין. בואו נסתכל על טרנספורמציה רכיבי הטנזורים ונשאל האם קיימים טנזורים שערכי הרכיבים שלהם לא תלויים בכיוון מערכת הצירים. כלומר, אנחנו רוצים למצוא טנזורים $T_{ij\dots}$ שעבורם

$$T'_{ij\dots} = R_{i\ell}^T R_{jm}^T \dots T_{\ell m\dots} = T_{ij\dots} \quad (57)$$

טנזור בעל תכונה זו נקרא **טנזור אינווריאנטי**.

למען הפשטות, נדבר תחילה על שני מימדי מרחב במקום שלושה ונשאל האם ניתן לבחור את ערכי הרכיבים של טנזור מדרגה 2, T_{ij} , כך שהם לא ישתנו תחת אף טרנספורמציה סיבוב. כדי לענות על שאלה זו, ניקח את משוואה (48) ונדרוש לקבל $T'_{ij} = T_{ij}$. עבור הרכיב T'_{11} נקבל את הדרישה

$$\begin{aligned} T_{11} &= R_{1\ell}^T R_{1m}^T T_{\ell m} = R_{11}^T R_{11}^T T_{11} + R_{11}^T R_{12}^T T_{12} + R_{12}^T R_{11}^T T_{21} + R_{12}^T R_{12}^T T_{22} \\ &= T_{11} \cos^2 \theta + (T_{12} + T_{21}) \cos \theta \sin \theta + T_{22} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (58)$$

כלומר

$$T_{11} - T_{22} = (T_{12} + T_{21}) \cot \theta \quad (59)$$

מכיוון שאנחנו רוצים שהתנאי יתקיים עבור כל θ , חייבים להתקיים הקשרים

$$T_{11} = T_{22}, \quad T_{12} = -T_{21} \quad (60)$$

ניתן לקבל באופן דומה שהחלת דרישת האינוריאנטיות על שלושת הרכיבים הנוותרים של T_{ij} לא מובילה לתנאים נוספים. אם כן, אנחנו מגיעים למסקנה שכל טנזור מהצורה

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv a \delta_{ij} + b \epsilon_{ij} \quad (61)$$

כאשר a ו- b הם קבועים שרירותיים, הוא טנזור אינוריאנטי (בשני מימדים).

הדלתא של קרונקר, δ_{ij} , המתואר על ידי מטריצת היחידה I , הוא טנזור אינוריאנטי בכל מספר של מימדים, כפי שניתן לראות בעזרת משוואה (51):

$$I' = R^T I R = R^T R = I \quad (62)$$

בשלושה מימדים, ניתן להראות שהטנזור האינוריאנטי היחיד מדרגה 2 הוא הדלתא של קרונקר δ_{ij} , הטנזור האינוריאנטי היחיד מדרגה 3 הוא סימן לוי-צ'יוויטה ϵ_{ijk} , ואין טנזורים אינוריאנטיים מדרגות גבוהות יותר (פרט למכפלות של הטנזורים הנ"ל). ניתן אם כן לראות את δ_{ij} ואת ϵ_{ijk} כמעין "קבועים טנזוריים" שיכולים להופיע בחוקי הפיזיקה. בפרט, ϵ_{ijk} מאפשר ליצור אובייקטים מתוחכמים כמו המכפלה הווקטורית או אופרטור הרוטור, שמופיעים בהרבה מקומות בפיזיקה. העובדה ש- ϵ_{ijk} הוא טנזור מדרגה 3 מבטיחה שמכפלה וקטורית של שני וקטורים

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (63)$$

היא וקטור, כפי שתוכלו להוכיח בדומה למה שעשינו לעיל בהקשר של טנזור האינרציה.