

## מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 10

### משפט גאוס/ משפט הדיברגנץ

השטף של שדה וקטורי  $\vec{F}$  דרך מעטפת סגורה כלשהי  $S$ , שווה לאינטגרל על הדיברגנס של השדה בתוך נפח  $V$  התחום על ידי מעטפת זו:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$$

נדגיש ונאמר כי הכיוון הנורמלי  $\hat{n}$  יהיה תמיד מכוון כלפי חוץ מהמעטפת הסגורה  $S$ , לכן שטף חיובי (שלילי) יוגדר לפי סכום קווי השדה היוצאים (הנכנסים) מהמעטפת (למעטפת) הסגורה פחות סכום קווי השדה הנכנסים (יוצאים).

### תרגיל 1

חשבו את שטף השדה  $\vec{F} = (x, y, 2 - 2z)$  דרך המשטח הנוצר על ידי הפרבולואיד  $z = 1 - x^2 - y^2$  מעל מישור  $z = 0$ .

1. על ידי חישוב ישיר של האינטגרל המשטחי

2. על ידי שימוש בחוק גאוס

### פתרון

1. חישוב ישיר:

על הפרבולואיד

$$\vec{F} = (x, y, 2 - 2(1 - x^2 - y^2)) = (x, y, 2x^2 + 2y^2)$$
$$\hat{n} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

על מישור  $x - y$

$$z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint_D (x, y, 2x^2 + 2y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy = \\ &= \iint_D (4x^2 + 4y^2) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 r dr d\theta = 8\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = 2\pi\end{aligned}$$

2. בעזרת משפט גאוס:

נשים לב שמשפט גאוס מדבר על שטף דרך משטח סגור וכאן יש לנו משטח פתוח, לכן נחשב את השטף דרך המשטח הסגור שכולל את הפרבולואיד והדיסקה שחוסמת אותו על מישור  $x - y$  ונחסיר את השטף דרך הדיסקה.

$$\oiint \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{Disc} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$$

נחשב את הדיברגנץ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + 1 - 2 = 0$$

כלומר, השטף הכולל הוא 0, נחשב את השטף דרך הדיסקה, כאשר  $z = 0$ :

$$\iint_{Disc} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F} \cdot (-\hat{z}) dx dy = - \iint_D 2 dx dy$$

נעבור לקוארדינטות פולאריות

$$= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = -2\pi$$

ולכן השטף דרך הפרבולואיד הוא:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \oiint \vec{F} \cdot \hat{n} dS - \iint_{Disc} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = 0 - (-2\pi) = 2\pi$$

### תרגיל 3

חשבו את שטף השדה  $\vec{F} = (0, 0, z)$  דרך המשטח הנוצר על ידי הקונוס  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  והמישור  $z = 1$ .

### פתרון

נחשב בעזרת משפט גאוס:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1$$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iiint dV$$

כלומר אנחנו צריכים פשוט לחשב את נפח הקונוס:  
הבסיס שלו מקיים  $z = 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ , כלומר זה עיגול ברדיוס  $r = 1$  והגובה הוא  $h = 1$ . לכן:

$$V_{con} = \frac{1}{3}(\text{base}) \times (\text{height}) = \frac{\pi}{3}$$

### חוק גאוס לכבידה

אם נרצה לפתח את השדה הכבידתי שנוצר כתוצאה ממסה נוכל לעשות זאת בעזרת חוק גאוס. המקור של שדה הכבידה הוא המסה, או צפיפות המסה, לכן

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r})$$

כאשר המינוס הוא מכיוון שהשדה הוא שדה מושך, ו- $G$  הוא קבוע הכבידה.

נתאר לנו קליפה שמקיפה איזור מסויים ונעשה אינטגרל על כל השטח הכלוא בתוכה

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) dV = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dV = -4\pi GM$$

ממשפט גאוס נקבל

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = -4\pi GM$$

כאשר יש סימטריה המאפשרת לפתור את האינטגרל ניתן למצוא מכאן את שדה הכבידה  $\vec{g}(\vec{r})$

#### תרגיל 4

נתון גליל אינסופי  $(-\infty \leq z \leq \infty)$  ברדיוס  $R$  עם צפיפות מסה אחידה  $\rho_0$ .

1. מהו השדה הגרביטציוני בתוך ההגליל

2. מהו השדה הגרביטציוני מחוץ לגליל

#### פתרון

צפיפות המסה תלויה רק במרחק מהציר

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) dV = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

1. נדמיין לעצמנו קליפה בצורת גליל הנמצאת בתוך הגליל שלנו, ברדיוס  $r < R$  ובאורך  $h$ . נחשב את האינטגרל על הצפיפות בתוך הגליל

$$-4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dV = -4\pi G \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r' dr' \int_0^h dz \rho_0 = -4\pi G \rho_0 \pi r^2 h$$

מחוק גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) dV = \oiint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

מכיוון שצפיפות המסה לא משתנה בכיוון  $\hat{z}$  ניתן להניח שאין שדה בכיוון הזה, כי כל שדה שתיצור המסה יתבטל עם שדה שתיצור מסה שווה בכיוון ההפוך. לכן השטף דרך הבסיסים יתאפס וצריך לחשב רק את השטף דרך הגליל, שיהיה רק בכיוון הרדיאלי ויהיה תלוי רק ב- $r$ , המרחק מציר  $z$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(r) = g(r)\hat{r}$$

הנורמל של המשטח הוא גם באותו כיוון  $\hat{n} = \hat{r}$

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^h dz g(r) = 2\pi h r g(r)$$

ומכאן

$$2\pi h r g(r) = -4\pi G \rho_0 \pi r^2 h$$

$$g(r) = -2\pi G \rho_0 r$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -2\pi G \rho_0 r \hat{r}$$

השדה גדל ליניארית עם ההתרחקות מהציר, כי המסה שבינינו לבין המרכז גדלה. שימו לב שהתוצאה לא תלויה באורך הגליל שבחרנו  $h$

2. עכשיו נדמיין שהקליפה שלנו היא ברדיוס  $r > R$  ובאותו אורך  $h$  נחשב את האינטגרל על הצפיפות בתוך הגליל

$$-4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dV = -4\pi G \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^h dz \rho_0 = -4\pi G \rho_0 \pi R^2 h$$

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^h dz g(r) = 2\pi h r g(r)$$

ומכאן

$$2\pi h r g(r) = -4\pi G \rho_0 \pi R^2 h$$

$$g(r) = -\frac{2\pi G \rho_0 R^2}{r}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{2\pi G\rho_0 R^2}{r}\hat{r}$$

בניגוד למקרה של מסה כדורית כאן השדה הולך כמו  $\sim \frac{1}{r}$  ולא כמו  $\sim \frac{1}{r^2}$  כי המסה של הגליל היא אינסופית

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(r) = -2\pi G\rho_0\hat{r} \begin{cases} r & r < R \\ \frac{R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

## מטריצות

מטריצה  $M$  מסדר של  $m \times n$  היא מטריצה בעלת  $m$  שורות ו- $n$  עמודות, הרכיב בשורה ה- $i$  והעמודה ה- $j$  יסומן  $M_{ij}$ . פעולות על מטריצות:

1. כפל במספר:  $(cM)_{ij} = cM_{ij}$

2. חיבור מטריצות (מאותו סדר):  $(M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$

3. שחלוף (transpose):  $(M^T)_{ij} = M_{ji}$

4. כפל מטריצות, כאשר מכפילים מטריצה מסדר  $m \times n$  במטריצה מסדר  $n \times \ell$  מקבלים מטריצה מסדר  $m \times \ell$

$$L_{ik} = \sum_{j=1}^n M_{ij}N_{jk} = M_{ij}N_{jk}$$

כלומר, הרכיב בכל מיקום במטריצה הוא סכום מכפלת הרכיבים של השורה בה הוא נמצא במטריצה הראשונה עם העמודה בה הוא נמצא במטריצה השנייה. כפל מטריצות הוא פעולה דיסטריבוטיבית  $(A(B+C) = AB+AC)$  ואסוציאטיבית  $(A(BC) = (AB)C)$  אבל לא בהכרח קומוטטיבית  $(AB \neq BA)$ .

## מטריצות ריבועיות

1. קיימת מטריצת יחידה  $I$  ביחס לכפל המקיימת  $MI = IM = M$

$$I_{ij} = \delta_{ij}$$

2. למטריצה  $M$  קיימת מטריצה הופכית  $M^{-1}$  המקיימת  $MM^{-1} = M^{-1}M = I$  אם ורק אם  $\det M \neq 0$ .  
למטריצה מסדר 2

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}$$

3. מטריצה ריבועית נקראת אורתוגונלית אם  $M^T = M^{-1}$

$$M^T M = M^{-1} M = I$$

$$M_{il}^T M_{lj} = M_{li} M_{lj} = \delta_{ij}$$

כלומר, מכפלה של כל עמודה בעמודה אחרת (או שורה בשורה אחרת) תתאפס ומכפלה של עמודה בעצמה שווה 1.

### סיבובים במרחב

נגדיר סיבוב אקטיבי כסיבוב של תוכן המרחב וסיבוב פסיבי כסיבוב של מערכת הצירים. סיבוב פסיבי של מערכת הצירים שקול לסיבוב אקטיבי של תוכן המרחב בכיוון ההפוך. המטריצה לסיבוב אקטיבי היא:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

סיבוב בכיוון ההפוך ייתן

$$R(-\theta) = R^T(\theta) = R^{-1}(\theta)$$

כלומר, מטריצות הסיבוב הן אורתוגונליות. בשלושה מימדים מטריצות הסיבוב הן

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## תרגיל 1

נתונים הווקטורים

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2 \end{pmatrix}$$

חשבו את מכפלת הווקטורים  
לאחר מכן סובבו את הווקטורים ב  $45^\circ$  סביב ציר  $\hat{y}$  ושוב ב  $30^\circ$  סביב ציר  $\hat{x}$  וחשבו את מכפלתם שוב

## פתרון

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + \frac{4}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

הסיבוב יהיה

$$\vec{v}' = R_x\left(\frac{\pi}{6}\right) R_y\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{v}$$

$$\vec{u}' = R_x\left(\frac{\pi}{6}\right) R_y\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\vec{u}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{8}} \\ \frac{7}{\sqrt{24}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נכפיל את הווקטורים המסובבים:

$$\vec{v}' \cdot \vec{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{8}} \\ \frac{7}{\sqrt{24}} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{7}{\sqrt{24}} = \frac{7}{3}$$