משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ב, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

משוואה דיפרנציאלית מסדר שני עבור הפונקציה $x(t)$ היא משוואה מהצורה

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right) \tag{1}$$

משוואה כזאת נקראת **ליניארית** אם היא מהצורה

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(t) - p(t)\frac{dx}{dt} - q(t)x(t) \tag{2}$$

נוכל לכתוב אותה גם כך:

$$\ddot{x} + p(t)\,\dot{x} + q(t)\,x = g(t) \tag{3}$$

אחרת (למשל אם מופיעים איברים מהצורה $\dot{x}^2$, x^2, $x\dot{x}$, וכדומה) המשוואה נקראת **לא־ליניארית**.

בפיזיקה, החוק השני של ניוטון נותן בדרך כלל משוואה דיפרנציאלית מסדר שני, שלעתים קרובות היא גם ליניארית. לדוגמה, עבור גוף הנתון לכוח של קפיץ עם קבוע k, כוח גרר ליניארי עם מקדם b וכוח נוסף שמשתנה בצורה מחזורית עם הזמן, מקבלים את המשוואה

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\,\dot{x} + f\sin\omega t \tag{4}$$

בדוגמה זו

$$g(t) = \frac{f}{m}\sin\omega t\,, \quad p(t) = \frac{b}{m}\,, \quad q(t) = \frac{k}{m} \tag{5}$$

בעיית תנאי התחלה היא בעיה שבנוסף למשוואה הדיפרנציאלית כוללת שני תנאי התחלה

$$x(t_0) = x_0 \tag{6}$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0 \tag{7}$$

כאשר x_0 ו־v_0 הם מספרים נתונים (הם יקבעו את שני קבועי האינטגרציה המתקבלים בפתרון משוואה דיפרנציאלית מסדר שני).

משפט הקיום והיחידות עבור משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר שני: בהנחה ש־$g(t)$, $q(t)$, $p(t)$ רציפות על תחום פתוח כלשהו של t, <u>קיים</u> פתרון <u>יחיד</u> לבעיית תנאי ההתחלה על פני התחום.

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

הסבר: מ־$x(t_0)$ ו־$\dot{x}(t_0)$ נוכל באמצעות הקירוב הליניארי לחשב את $x(t_0+\Delta t)$. באופן דומה, מ־$\dot{x}(t_0)$ ו־$\ddot{x}(t_0)$ (שניתן לחישוב ישיר על ידי הצבת $x(t_0)$ ו־$\dot{x}(t_0)$ במשוואה) נוכל לחשב את $\dot{x}(t_0+\Delta t)$. עכשיו כל המידע שהיה לנו על $t=t_0$ יש לנו גם עבור $t=t_0+\Delta t$. נוכל לחזור על הפעולה שוב ושוב עד שנגיע לכל t שנרצה.

משוואה ליניארית נקראת **הומוגנית** אם $g(t)=0$.

עקרון הסופרפוזיציה: עבור משוואה ליניארית הומוגנית, אם $x_1(t)$ ו־$x_2(t)$ הם פתרונות, אז כל קומבינציה ליניארית שלהם

$$x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \tag{8}$$

כאשר a_1 ו־a_2 הם קבועים שרירותיים, היא גם פתרון.

הוכחה: על ידי הצבת הפתרון במשוואה נקבל שהמשוואה מתפרקת לסכום של שתי משוואות, אחת עבור $x_1(t)$ והשנייה עבור $x_2(t)$. כל אחת מאלה מתאפסת ולכן גם הסכום מתאפס.

משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

נתמקד על המקרה

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0 \tag{9}$$

כאשר p ו־q הם קבועים. זוהי משוואה דיפרנציאלית ליניארית והומוגנית.
טענה:

$$x(t)=e^{rt} \tag{10}$$

הוא פתרון של המשוואה אם"ם r הוא שורש של המשוואה

$$r^2+pr+q=0 \tag{11}$$

ניתן לבדוק זאת על־ידי הצבת הפתרון (10) במשוואה המקורית. משוואה (11) נקראת **המשוואה האופיינית (characteristic equation)** של המשוואה הדיפרנציאלית. אם למשוואה האופיינית שני פתרונות שונים, r_1 ו־r_2, אז לפי עקרון הסופרפוזיציה כל קומבינציה ליניארית מהצורה

$$x(t)=a_1e^{r_1t}+a_2e^{r_2t} \tag{12}$$

היא פתרון למשוואה הדיפרנציאלית. נבדוק האם תמיד ניתן למצוא a_1 ו־a_2 שיקיימו את תנאי ההתחלה. נדרוש

$$x(t_0)=a_1e^{r_1t_0}+a_2e^{r_2t_0}=x_0 \tag{13}$$

$$\dot{x}(t_0)=a_1r_1e^{r_1t_0}+a_2r_2e^{r_2t_0}=v_0 \tag{14}$$

ונקבל

$$a_1=\frac{x_0r_2-v_0}{r_2-r_1}\,e^{-r_1t_0}\,, \qquad a_2=\frac{v_0-x_0r_1}{r_2-r_1}\,e^{-r_2t_0} \tag{15}$$

מצאנו, אם כן, ערכים של a_1 ו־a_2 עבורם תנאי ההתחלה מתקיימים (כל עוד $r_1\neq r_2$), ולפי משפט הקיום והיחידות זהו הפתרון היחיד.

נשים לב שעבור המשוואה האופיינית (11) קיימים שלושה מקרים במונחים של הדיסקרימיננטה $D \equiv p^2 - 4q$:

1. $D > 0$, אזי $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$, כלומר שני פתרונות ממשיים.
2. $D = 0$, אזי $r_{1,2} = -\dfrac{p}{2}$, כלומר פתרון יחיד, ממשי.
3. $D < 0$, אזי $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{-D}}{2} \equiv -\lambda \pm i\mu$, כלומר שני פתרונות מרוכבים.

<u>המקרה הראשון</u>: הפתרון הכללי הוא

$$x(t) = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t} \tag{16}$$

ואין כאן מה להוסיף על מה שכבר דיברנו.

<u>המקרה השני</u>: באמצעות המשוואה האופיינית מצאנו פתרון יחיד e^{rt} עם $r = -p/2$. האם יכול להיות שהפתרון הכללי הוא פשוט $x(t) = a\, e^{rt}$? במקרה כזה נקבל $\dot{x}(t) = r\, x(t)$. ומה אם תנאי ההתחלה ב־$t = t_0$ אינם מקיימים קשר זה? לפי משפט הקיום והיחידות, חייב להיות פתרון נוסף!

טענה:

$$x(t) = t\, e^{rt} \tag{17}$$

הוא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית אם"ם r הוא הפתרון היחיד של המשוואה האופיינית.

הוכחה: מתקיים

$$\dot{x}(t) = e^{rt}(1 + rt) \tag{18}$$

$$\ddot{x}(t) = e^{rt} r(2 + rt) \tag{19}$$

ולכן

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = e^{rt}(2r + p + t\,\underbrace{(r^2 + pr + q)}_{=0}) = e^{rt}(2r + p) \tag{20}$$

הביטוי מתאפס אם"ם $r = -p/2$, ומכאן הטענה.

הפתרון הכללי במקרה זה הוא:

$$x(t) = a_1 e^{rt} + a_2 t e^{rt} \tag{21}$$

<u>המקרה השלישי</u>: פתרונות המשוואה האופיינית מרוכבים, ונקבל

$$x_{\pm}(t) = e^{(-\lambda \pm i\mu)t} = e^{-\lambda t} e^{\pm i\mu t} = e^{-\lambda t}(\cos \mu t \pm i \sin \mu t) \tag{22}$$

כאשר השתמשנו בקשר $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. למרות שהפתרונות הנ"ל מרוכבים, הם רלוונטיים גם כאשר $x(t)$ הוא גודל פיזיקלי ממשי (למשל, מיקום של גוף) כי ניתן ליצור מהם קומבינציות ליניאריות ממשיות, שגם יהיו פתרונות של המשוואה לפי עקרון הסופרפוזיציה.

ובכלל, במקום לעבוד במונחים של שני הפתרונות המרוכבים הנ"ל אנחנו יכולים לעבוד במונחים של שני הפתרונות הממשיים

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(x_+(t) + x_-(t)\right) = e^{-\lambda t}\cos\mu t \tag{23}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2i}\left(x_+(t) - x_-(t)\right) = e^{-\lambda t}\sin\mu t \tag{24}$$

ולרשום את הפתרון הכללי כ־

$$x(t) = \left(a_1\cos\mu t + a_2\sin\mu t\right)e^{-\lambda t} \tag{25}$$

משוואות ליניאריות לא־הומוגניות

כדי לפתור משוואות לא־הומוגניות מהצורה

$$\ddot{x} + p(t)\,\dot{x} + q(t)\,x = g(t) \tag{26}$$

נוכיח שני משפטים:

משפט: ההפרש בין כל שני פתרונות $X_1(t)$ ו־$X_2(t)$ של המשוואה הלא־הומוגנית הוא פתרון למשוואה ההומוגנית.
הוכחה: נציב את $X_1(t) - X_2(t)$ במשוואה ההומוגנית ונקבל את הטענה (האיבר הלא־הומוגני מתאפס בשל לקיחת ההפרש).

משפט: ניתן לכתוב את הפתרון הכללי למשוואה הלא־הומוגנית בצורה

$$X(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \tilde{X}(t) \tag{27}$$

כאשר $\tilde{X}(t)$ הוא פתרון מסוים כלשהו ("פתרון פרטי") למשוואה הלא־הומוגנית, $x_1(t)$ ו־$x_2(t)$ הם פתרונות למשוואה ההומוגנית ו־a_1 ו־a_2 קבועים כלשהם.
הוכחה: לפי המשפט הקודם, עבור כל פתרון $X(t)$ חייב להתקיים

$$X(t) - \tilde{X}(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \tag{28}$$

דוגמה: משוואה עם מקדמים קבועים ואיבר לא־הומוגני מעריכי

ניקח את המשוואה

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = g_0e^{\lambda t} \tag{29}$$

כאשר p, q, g_0 ו־λ הם קבועים נתונים. פתרנו כבר את המשוואה ההומוגנית. נותר למצוא פתרון למשוואה הלא־הומוגנית. ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$\tilde{X}(t) = ce^{\lambda t} \tag{30}$$

כאשר c הוא קבוע. נציב את הפתרון במשוואה ונקבל

$$c\lambda^2e^{\lambda t} + pc\lambda e^{\lambda t} + qce^{\lambda t} = g_0e^{\lambda t} \tag{31}$$

המשוואה מתקיימת עבור

$$c = \frac{g_0}{\lambda^2 + p\lambda + q} \tag{32}$$

לכן נוכל לרשום את הפתרון הכללי כך:

$$X(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \frac{g_0}{\lambda^2 + p\lambda + q}\, e^{\lambda t} \tag{33}$$

כאשר $x_{1,2}(t)$ הם הפתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \tag{34}$$

דוגמה: משוואה עם מקדמים קבועים ואיבר לא־הומוגני מחזורי

ניקח את המשוואה

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = g_0 \cos \omega t \tag{35}$$

כאשר p, q, g_0 ו־ω הם קבועים נתונים. נבדוק אפשרות לפתרון פרטי מהצורה

$$\tilde{X}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{36}$$

נחשב

$$\dot{\tilde{X}}(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \tag{37}$$

$$\ddot{\tilde{X}}(t) = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t \tag{38}$$

ונציב במשוואה:

$$\left[\left(q - \omega^2\right) A + p\omega B\right] \cos \omega t + \left[\left(q - \omega^2\right) B - p\omega A\right] \sin \omega t = g_0 \cos \omega t \tag{39}$$

מכאן מקבלים מערכת משוואות למציאת A ו־B

$$\left(q - \omega^2\right) A + p\omega B = g_0 \tag{40}$$

$$\left(q - \omega^2\right) B - p\omega A = 0 \tag{41}$$

ניתן לכתוב זאת גם כמשוואה מטריציונית

$$\begin{pmatrix} q - \omega^2 & p\omega \\ -p\omega & q - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

ולקבל את A ו־B על ידי היפוך המטריצה. עבור מטריצה כללית מסדר 2×2

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{43}$$

המטריצה ההופכית היא

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \tag{44}$$

המטריצה שבמשוואה (42) בדרך כלל הפיכה.[1] נהפוך אותה ונקבל[2]

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2} \begin{pmatrix} q-\omega^2 & -p\omega \\ p\omega & q-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$= \frac{g_0}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2} \begin{pmatrix} q-\omega^2 \\ p\omega \end{pmatrix} \tag{46}$$

הפתרון הפרטי למשוואה הלא־הומוגנית הוא אם כן

$$\tilde{X}(t) = \frac{g_0}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}\left[(q-\omega^2)\cos\omega t + p\omega\sin\omega t\right] \tag{47}$$

והפתרון הכללי לאותה המשוואה (כל עוד $r_1 \neq r_2$) הוא

$$X(t) = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t} + \frac{g_0}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}\left[(q-\omega^2)\cos\omega t + p\omega\sin\omega t\right] \tag{48}$$

כאשר $a_{1,2}$ הם קבועים הנקבעים ע"י תנאי ההתחלה. נוכל לכתוב את הפתרון הכללי גם כך:

$$X(t) = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t} + G\cos(\omega t - \delta) \tag{49}$$

כאשר הגדרנו

$$G = \frac{g_0}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\,, \qquad \sin\delta = \frac{p\omega}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}} \tag{50}$$

כפי שניתן לבדוק באמצעות זהויות טריגונומטריות (ראו פיתוח בנספח).

נדון במשמעות של פתרונות אלה בהקשר של **הדוגמה הפיזיקלית**

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - b\,\dot{x} + f\cos\omega t \tag{51}$$

הדיסקרימיננטה הקובעת האם הפתרונות של המשוואה האופיינית ממשיים או מרוכבים היא

$$D = p^2 - 4q = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} \tag{52}$$

עבור $D < 0$, מקרה המתקבל כאשר מקדם הגרר b קטן, מקבלים

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\mu \tag{53}$$

עם

$$\lambda = \frac{p}{2} = \frac{b}{2m} > 0\,, \qquad \mu = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{54}$$

כאשר $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ היא התדירות הטבעית של הקפיץ (תדירות התנודות בהיעדר כוח הגרר והכוח המאלץ).

[1] הדטרמיננטה שלה, $(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2$, מתאפסת רק אם $p = 0$ ו־$q = \omega^2$. בדוגמת הקפיץ, זה מתרחש כאשר מקדם כוח הגרר הוא בדיוק $b = 0$ ותדירות הכוח המאלץ שווה בדיוק לתדירות הטבעית של הקפיץ, $\omega = \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$.

[2] יכולנו בקלות לקבל את הפתרון למערכת המשוואות גם ללא שימוש במטריצות.

הפתרון הכללי במקרה הזה

$$X(t) = (a_1 \cos \mu t + a_2 \sin \mu t)\, e^{-\lambda t} + G \cos(\omega t - \delta) \tag{55}$$

מורכב מתנודות בתדירות $\mu < \omega_0$ הדועכות תוך זמן טיפוסי $1/\lambda$, ובנוסף תנודות עם אמפליטודה קבועה G, תדירות השווה לתדירות ω של הכוח המאלץ, אבל בפיגור פאזה ביחס אליו. נשים לב שהתנודות המאולצות אינן תלויות בתנאי ההתחלה, והאמפליטודה שלהן

$$G = \frac{f}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \tag{56}$$

גדולה במיוחד אם תדירות הכוח המאלץ ω קרובה לתדירות הטבעית ω_0 ומקדם הגרר b קטן.

עבור $D > 0$, המתקבל כאשר מקדם הגרר b גדול, מקבלים את שני הפתרונות הממשיים

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right) \tag{57}$$

נשים לב ש־$p = b/m > 0$. כמו־כן, מפני ש־$q = k/m = \omega_0^2 > 0$, מתקיים $\sqrt{p^2 - 4q} < p$. לכן שני הפתרונות $r_{1,2}$ שליליים. נסמנם $r_{1,2} \equiv -\gamma_{1,2}$. הפתרון הכללי הוא

$$X(t) = a_1 e^{-\gamma_1 t} + a_2 e^{-\gamma_2 t} + G \cos(\omega t - \delta) \tag{58}$$

אנחנו רואים שהתלות בתנאי ההתחלה, הנמצאת בשני האיברים הראשונים, דועכת תוך זמן טיפוסי $1/\gamma_1$ או $1/\gamma_2$, בעוד שהאיבר השלישי אינו תלוי בתנאי ההתחלה, והוא מתאר תנודות באמפליטודה קבועה, בתדירות השווה לתדירות הכוח המאלץ, אבל בפיגור פאזה ביחס אליו, כמו שהיה במקרה $D < 0$.

ניחוש פתרון פרטי עבור משוואה לא־הומוגנית עם מקדמים קבועים

עבור משוואה מהצורה

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = g(t) \tag{59}$$

ננחש פתרון פרטי בהתאם לטבלה הבאה:

$\tilde{X}(t)$	$g(t)$
$A \cos \omega t + B \sin \omega t$	$g_0 \cos \omega t$
$A \cos \omega t + B \sin \omega t$	$g_0 \sin \omega t$
$c\, e^{\lambda t}$	$g_0\, e^{\lambda t}$
$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_N t^N$	$g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots + g_N t^N$

במקרים המיוחדים בהם הניחוש הסטנדרטי מתלכד עם אחד הפתרונות של המשוואה ההומוגנית, לדוגמה עבור $e^{\lambda t}$ במקרה בו λ שווה ל־r_1 או r_2 ממשוואה (16), הוא כמובן לא יהיה פתרון גם למשוואה הלא־הומוגנית. במקרה כזה יש להכפיל את הניחוש ב־t: $\tilde{X}(t) = c\, t\, e^{\lambda t}$.

נספח

נרצה להראות ש־

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = G \cos(\omega t - \delta) \tag{60}$$

כאשר

$$G = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{61}$$

$$\sin \delta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{62}$$

כדי לקבל תוצאה זו, נשתמש ב־

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta \tag{63}$$

ונדרוש שהאיברים עם $\cos \omega t$ והאיברים עם $\sin \omega t$ יהיו שווים בין שני האגפים של משוואה (60). נקבל

$$A = G \cos \delta\,, \quad B = G \sin \delta \tag{64}$$

זה מייד נותן את (61) (בעזרת $\cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1$) ואת (62).

עבור

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{g_0}{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2} \begin{pmatrix} q - \omega^2 \\ p\omega \end{pmatrix} \tag{65}$$

נקבל ממשוואות (61)-(62) את הביטויים במשוואה (50).