מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 11

טנזורים

סקלר - (טנזור מדרגה 0) מספר שאינו משתנה תחת טרנספורמציית סיבוב פסיבית.
ווקטור - (טנזור מדרגה 1) משתנה תחת טרנספורמציית סיבוב כך:

$$\vec{v}' = R^T \vec{v}$$

$$v_i' = R_{ij}^T v_j$$

טנזור מדרגה 2 משתנה כך:

$$A_{ij}' = R_{il}^T R_{jm}^T A_{lm} = R_{il}^T A_{lm} R_{mj}$$

$$A' = R^T A R$$

תרגיל 1

נתונים ווקטורים $\vec{v}, \vec{u}$ וטנזורים מדרגה 2 A, B. הוכיחו שהביטוי $\vec{v}^T A B \vec{u}$ הוא סקלר

פתרון

כדי לבדוק האם ביטוי הוא סקלר צריך לבדוק איך הוא משתנה תחת סיבוב פסיבי
נעבור לכתיב אינדקסים

$$\begin{aligned}
\vec{v}_i' A_{ij}' B_{jl}' u_l' =& R_{im}^T v_m R_{in}^T R_{jo}^T A_{no} R_{jp}^T R_{lq}^T B_{pq} R_{lr}^T u_r = \\
=& R_{im}^T R_{in}^T R_{jo}^T R_{jp}^T R_{lq}^T R_{lr}^T v_m A_{no} B_{pq} u_r = \\
=& R_{mi} R_{in}^T R_{oj} R_{jp}^T R_{ql} R_{lr}^T v_m A_{no} B_{pq} u_r =
\end{aligned}$$

נשתמש בזהות $R_{il}R^T_{lj}=\delta_{ij}$ הנובעת מכך שמטריצות הסיבוב הן אורתוגונליות.

$$=\delta_{mn}\delta_{op}\delta_{qr}v_mA_{no}B_{pq}u_r=v_mA_{mo}B_{oq}u_q=\vec{v}^TAB\vec{u}$$

הביטוי לא השתנה תחת סיבוב ולכן הוא סקלר.
ניתן להראות זאת גם בכתיבה מטריציונית:

$$\begin{aligned}\vec{v}'^TA'B'\vec{u}'=&\left(R^T\vec{v}\right)^TR^TARR^TBRR^T\vec{u}=\\=&\vec{v}^TRR^TARR^TBRR^T\vec{u}=\vec{v}^TAB\vec{u}\end{aligned}$$

תרגיל 2

נתון חלקיק בעל מסה m הנע במהירות קבועה במעגל ברדיוס R.
נתבונן בביטוי:

$$I_{ij}\omega_i\omega_j=I\omega^2$$

כאשר I_{ij} הוא טנזור האינרציה

$$I_{ij}=m\left(\delta_{ij}r_kr_k-r_ir_j\right)$$

ו I הוא ממונט האינרציה סביב ציר הסיבוב של החלקיק

$$I=mR^2$$

כאשר R הוא המרחק האנכי מציר הסיבוב.
המהירות הזוויתית הנתונה היא:

$$\vec{\omega}=\frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1. מצאו באיזו זווית יש לסובב את המערכת סביב ציר $\hat{x}$ כדי שהווקטור $\vec{\omega}$ יהיה בכיוון $\hat{z}'$ בלבד.
2. כיצד תיראה התנועה במערכת החדשה?
3. מה יהיה גודלו של ווקטור המיקום בשתי המערכות?

פתרון

1. כדי למצוא את הטרנספורמציה של מערכת הצירים נחפש את הטרנספורמציה שתעביר את וקטור המהירות הזוויתית להיות בציר $\hat{z}'$ בלבד:

$$\vec{\omega}' = R_x^T(\theta)\,\vec{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\theta)+\sin(\theta) \\ \cos(\theta)+\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

על מנת שיהיה לנו רכיב רק בציר $\hat{z}'$ חייב להתקיים:

$$\cos(\theta) = \sin(\theta) \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

וקיבלנו

$$\vec{\omega}' = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. אם נחשב את המכפלה הטנזורית עבור המיקום הכללי של החלקיק $\vec{r} = (x, y, z)$ נקבל:

$$\begin{aligned} I_{ij}\omega_i\omega_j =& \frac{m\omega^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ =& \frac{m\omega^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xy-xz \\ -x^2-z^2-yz \\ zy+x^2+y^2 \end{pmatrix} = \\ =& \frac{m\omega^2}{2}\left(2x^2+y^2+2yz+z^2\right) = I\omega^2 = m\omega^2R^2 \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה שמתארת את המיקום של החלקיק

$$x^2 + \left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)^2 = R^2$$

נכתוב את וקטור המיקום שלנו בעזרת הקוארדינטות החדשות

$$\vec{r}' = R_x^T\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{r} \to \vec{r} = R_x\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{r}'$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y'-z') \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y'+z') \end{pmatrix}$$

נעביר את המשוואה שלנו לקוארדינטות החדשות

$$x'^2+\left(\frac{1}{2}\left(y'-z'\right)+\frac{1}{2}\left(y'+z'\right)\right)^2=R^2$$

$$x'^2+y'^2=R^2$$

קיבלנו שהתנועה היא במעגל מעל מישור $x'-y'$.

3. הגודל של וקטור המיקום הוא

$$|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

נעבור לקוארדינטות החדשות:

$$|r|=\sqrt{x'^2+\frac{1}{2}\left(y'-z'\right)^2+\frac{1}{2}\left(y'+z'\right)^2}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=|r'|$$

המרחק לא השתנה כי הוא סקלר שלא משתנה תחת סיבוב.

תרגיל 3

הראו שטרנספורמציית הסיבוב בשני מימדים היא טנזור אינווריאנטי

פתרון

טרנספורמציית הסיבוב היא

$$R\left(\theta\right)=\left(\begin{array}{cc}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{array}\right)$$

נבדוק כל רכיב בנפרד

אנחנו מסובבים על ידי $R^T\left(\alpha\right)=\left(\begin{array}{cc}\cos\left(\alpha\right) & \sin\left(\alpha\right)\\ -\sin\left(\alpha\right) & \cos\left(\alpha\right)\end{array}\right)$

$$\begin{aligned}R'_{11}=&R^T_{1i}R^T_{1j}R_{ij}=\\ =&R^T_{11}R^T_{11}R_{11}+R^T_{11}R^T_{12}R_{12}+R^T_{12}R^T_{11}R_{21}+R^T_{12}R^T_{12}R_{22}=\\ =&\cos^2\left(\alpha\right)\cos\left(\theta\right)-\cos\left(\alpha\right)\sin\left(\alpha\right)\sin\left(\theta\right)+\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)\sin\left(\theta\right)+\sin^2\left(\alpha\right)\cos\left(\theta\right)=\\ =&\cos^2\left(\alpha\right)\cos\left(\theta\right)+\sin^2\left(\alpha\right)\cos\left(\theta\right)=\cos\left(\theta\right)=R_{11}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R'_{12} =& R^T_{1i} R^T_{2j} R_{ij} = \\
=& R^T_{11} R^T_{21} R_{11} + R^T_{11} R^T_{22} R_{12} + R^T_{12} R^T_{21} R_{21} + R^T_{12} R^T_{22} R_{22} = \\
=& -\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos^2(\alpha)\sin(\theta) - \sin^2(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& -\cos^2(\alpha)\sin(\theta) - \sin^2(\alpha)\sin(\theta) = -\sin(\theta) = R_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R'_{22} =& R^T_{2i} R^T_{2j} R_{ij} = \\
=& R^T_{21} R^T_{21} R_{11} + R^T_{21} R^T_{22} R_{12} + R^T_{22} R^T_{21} R_{21} + R^T_{22} R^T_{22} R_{22} = \\
=& \sin^2(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\theta) + \cos^2(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& \sin^2(\alpha)\cos(\theta) + \cos^2(\alpha)\cos(\theta) = \cos(\theta) = R_{22}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R'_{21} =& R^T_{2i} R^T_{1j} R_{ij} = \\
=& R^T_{21} R^T_{11} R_{11} + R^T_{21} R^T_{12} R_{12} + R^T_{22} R^T_{11} R_{21} + R^T_{22} R^T_{12} R_{22} = \\
=& -\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin^2(\alpha)\sin(\theta) + \cos^2(\alpha)\sin(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& \sin^2(\alpha)\sin(\theta) + \cos^2(\alpha)\sin(\theta) = \sin(\theta) = R_{21}
\end{aligned}
$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

משוואה דיפרנציאלית מסדר שני היא משוואה מהצורה:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f\left(t, x(t), \frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

המשוואה נקראת ליניארית אם היא מהצורה:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = g(t)$$

אם $g(t) = 0$ המשוואה נקראת הומוגנית.
בעייה הכוללת משוואה דיפרנציאלית ושני תנאי התחלה

$$
\begin{aligned}
x(t_0) =& x_0 \\
\dot{x}(t_0) =& v_0
\end{aligned}
$$

נקראת בעיית תנאי התחלה.
משפט הקיום והיחידות אומר שאם הפונקציות של המקדמים רציפות בתחום, **קיים** פתרון לבעיית תנאי התחלה על פני התחום והפתרון הוא **יחיד**.
פתרון לבעיית תנאי התחלה יורכב תמיד מסופרפוזיציה של שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה הדיפרנציאלית.

$$x\left(t\right)=a_{1}x_{1}\left(t\right)+a_{2}x_{2}\left(t\right)$$

משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר שני עם מקדמים קבועים

עבור המשוואה

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0$$

נציב פתרון $x=e^{rt}$ ונקבל את המשוואה האופיינית

$$r^{2}+pr+q=0$$

שהפתרונות שלה הם

$$r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^{2}-4q}}{2}$$

נגדיר $D=p^{2}-4q$
ונקבל שלושה מצבים

1. $D>0$, נקבל שני פתרונות והפתרון הכללי יהיה סופרפוזיציה של שניהם:

$$x\left(t\right)=a_{1}e^{r_{1}t}+a_{2}e^{r_{2}t}$$

כאשר בבעיית תנאי התחלה a_{1},a_{2} יקבעו כך שיקיימו את תנאי ההתחלה שלנו.

2. $D=0$, נקבל רק פתרון אחד $r=-\frac{p}{2}$ מכיוון שלבעיית תנאי התחלה צריך שני פתרונות בלתי תלויים ניקח פתרון נוסף $x_{2}\left(t\right)=te^{rt}$, כך שהפתרון הכללי יהיה:

$$x\left(t\right)=a_{1}e^{rt}+a_{2}te^{rt}$$

3. $D<0$, נקבל שני פתרונות צמודים אחד של השני והפתרון הכללי יהיה:

$$x\left(t\right)=a_{1}e^{-\lambda t}\cos\left(\mu t\right)+a_{2}e^{-\lambda t}\sin\left(\mu t\right)$$

כאשר $\lambda=\frac{p}{2}$ ו- $\mu=\frac{\sqrt{|D|}}{2}$.

המשוואה הזו מתארת תנועה של אוסילטור הרמוני, למשל קפיץ. כאשר הרכיב של $\dot{x}$ מתאר כוח שמרסן את הקפיץ, חיכוך או גרר. אם המשוואה לא הומגונית אז $g\left(t\right)$ מתאר כוח מאלץ שמגביר את התנודות.

תרגיל 4

פתרו את המשוואה:

$$\ddot{x}+8\dot{x}+7x=0$$

עם תנאי ההתחלה

1. $x\left(0\right)=2,\dot{x}\left(0\right)=0$
2. $x\left(0\right)=0,\dot{x}\left(0\right)=2$

פתרון

נציב $x\left(t\right)=e^{rt}$
ונקבל את המשוואה האופיינית:

$$r^{2}+8r+7=0$$

$$r_{1,2}=-4\pm\frac{\sqrt{64-28}}{2}-4\pm3$$

$$r_{1}=-1,\quad r_{2}=-7$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל את הפתרון הכללי:

$$x\left(t\right)=a_{1}e^{-t}+a_{2}e^{-7t}$$

1. נציב את תנאי ההתחלה

$$x\left(0\right)=a_{1}+a_{2}=2\rightarrow a_{2}=2-a_{1}$$

$$\dot{x}\left(0\right)=-a_{1}-7a_{2}=-a_{1}-7\left(2-a_{1}\right)=6a_{1}-14=0$$

$$\rightarrow a_{1}=\frac{7}{3},\quad a_{2}=-\frac{1}{3}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=\frac{7}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-7t}$$

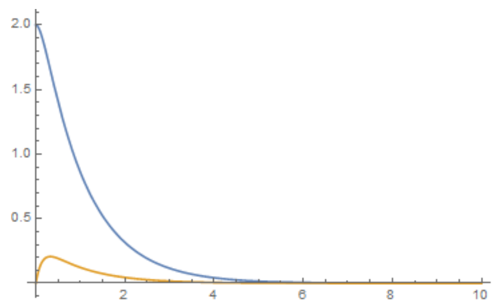
2. נציב את תנאי ההתחלה

$$x\left(0\right)=a_{1}+a_{2}=0\rightarrow a_{2}=-a_{1}$$

$$\dot{x}\left(0\right)=-a_{1}-7a_{2}=a_{1}\left(-1+7\right)=6a_{1}=2\rightarrow a_{1}=\frac{1}{3}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=\frac{e^{-t}}{3}-\frac{e^{-7t}}{3}$$



המשוואה הזו מתארת ריסון חזק כך שהקפיץ לא עושה כלל תנודות אלא דועך מיד לעצירה.

תרגיל 5

פתרו את המשוואה:

$$\ddot{x}+2\dot{x}+4x=0$$

עם תנאי ההתחלה

1. $x\left(0\right)=2,\dot{x}\left(0\right)=0$
2. $x\left(0\right)=0,\dot{x}\left(0\right)=2$

פתרון

נציב $x\left(t\right)=e^{rt}$
ונקבל את המשוואה האופיינית:

$$r^{2}+2r+4=0$$

$$r_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{4-16}}{2}-1\pm i\sqrt{3}$$

$$r_{1}=-1+i\sqrt{3},\quad r_{2}=-1-i\sqrt{3}$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל את הפתרון הכללי:

$$x\left(t\right)=a_{1}e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+a_{2}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

1. נציב את תנאי ההתחלה

$$x\left(0\right)=a_{1}=2$$

$$\dot{x}\left(t\right)=-a_{1}e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\sqrt{3}a_{1}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)-a_{2}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}a_{2}e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$\dot{x}\left(0\right)=-2+\sqrt{3}a_2=0\rightarrow a_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=2e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

2. נציב את תנאי ההתחלה

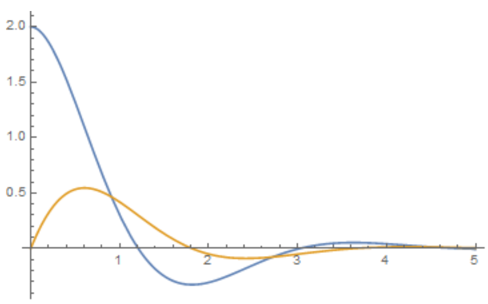
$$x\left(0\right)=a_1=0$$

$$\dot{x}\left(t\right)=-a_2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}a_2e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$\dot{x}\left(0\right)=\sqrt{3}a_2=2\rightarrow a_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$



המשוואה הזו מתארת ריסון חלש כך שהקפיץ מתנודד אבל האמפליטודה קטנה עד לעצירה.