מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 13 - תרגול חזרה

תרגיל 1 - 2019 מועד א

פתחו את הפונקציה $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1+2\sin^3 x}}$ לטור חזקות של x עד סדר x^3, כולל.

פתרון

$$\cos^2 x=\left(1-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)^2=1-x^2+\ldots$$

מכיוון שכאשר $x\to 0$ גם $2\sin^3 x\to 0$ נגדיר $2\sin^3 x=y$ ונפתח

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin^3 x}}&=(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{y}{2}+\frac{3}{8}y^2+\ldots\\&=1-\sin^3 x+\frac{3}{2}\sin^6 x+\ldots=1-\left(x-\frac{x^3}{6}\ldots\right)^3+\ldots=1-x^3+\ldots\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+2\sin^3 x}}=\left(1-x^2+\ldots\right)\left(1-x^3+\ldots\right)=1-x^2-x^3+\ldots$$

תרגיל 2 - 2019 מועד ב

מצאו את הפתרון הכללי למשוואה

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x-20=25t$$

פתרון

נרשום משוואה ליניארית זו בצורה הסטנדרטית

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=g(t)$$

כאשר $g(t)=25t+20$.
נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית, עם $g(t)=0$:
ננחש פתרון מהצורה $x(t)=e^{rt}$, הצבתו במשוואה נותנת את המשוואה האופיינית $r^2+4r+5=0$ שפתרונותיה $r_\pm=-2\pm i$ נותנים

$$x_\pm(t)=e^{-2t}e^{\pm it}=e^{-2t}\left(\cos t\pm i\sin t\right)$$

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא אם כן

$$x(t)=e^{-2t}\left(a\cos t+b\sin t\right)$$

כאשר a ו־b הם קבועים שרירותיים. צורתה של $g(t)$ מובילה אותנו לנחש פתרון פרטי למשוואה המקורית מהצורה $\tilde{x}(t)=At+B$ כאשר A ו־B הם קבועים שאותם עדיין צריך למצוא.
הצבת פתרון זה במשוואה נותנת

$$5At+4A+5B=25t+20$$

מהשוואת האיברים הליניאריים ב־t בשני אגפי המשוואה מקבלים $A=5$, ואז מהשוואת האיברים הקבועים מקבלים $B=0$, מה שנותן לנו את הפתרון הפרטי

$$\tilde{x}(t)=5t$$

הפתרון הכללי של המשוואה המקורית יהיה הסכום של הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית והפתרון הפרטי, כלומר

$$x(t)=e^{-2t}\left(a\cos t+b\sin t\right)+5t$$

כאשר a ו־b הם קבועים שרירותיים.

תרגיל 3 - 2019 מועד ב

נתון גביע גלידה בצורת חרוט (קונוס) שגובהו h ורדיוס הפתח שלו R, כך שמעטפת הגביע מתוארת על ידי המשוואה

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z^2\,,\quad 0\le z\le h$$

הגביע מלא בגלידה בעל צפיפות אחידה ρ.

(א) חשבו את מסת הגלידה M על ידי חישוב האינטגרל

$$M = \iiint dm = \iiint \rho \, dV$$

(ב) חשבו את גובה מרכז המסה של הגלידה, כלומר את האינטגרל

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \iiint z \, dm = \frac{1}{M} \iiint z \, \rho \, dV$$

פתרון

(א) מכיוון ש־ρ קבוע, ניתן להוציא אותו מחוץ לאינטגרל, $M = \rho \iiint dV$, ונשאר לחשב את הנפח. נשים לב שחיתוך הנפח במאונך לציר z נותן עיגולים עם רדיוס Rz/h, כלומר שטח $\pi R^2 z^2/h^2$. אז נשאר רק לעשות אינטגרציה לפי z:

$$M = \frac{\pi R^2 \rho}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h \rho$$

(ב) מכיוון שהאינטגרנד תלוי רק ב־z, גם כאן ניתן לחשב את שטחי העיגולים בנפרד ולעשות אינטגרציה רק לפי z:

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \frac{\pi R^2 \rho}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2 \rho}{4M} = \frac{3}{4} h$$

תרגיל 4 - 2020 **מועד א**

חשבו את הנגזרת של הפונקציה

$$f(x) = x^{1/x}$$

פתרון

נרשום

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

ונגזור את שני האגפים:

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$$

נציב $f(x)=x^{1/x}$ ונקבל

$$f'(x)=(1-\ln x)\,x^{1/x-2}$$

תרגיל 5 - 2020 מועד א

חיפושית הולכת על צמח במסלול המתואר על ידי

$$\vec{r}(t)=\left(\sin t,\,\cos t,\,t^{3/2}\right)$$

כאשר t הוא פרמטר המסילה, והמסלול מתחיל ב־$t=0$. לאחר שהחיפושית מגיעה לגובה $z=1$, היא נזכרת ששכחה דבר־מה בנקודת ההתחלה, ועפה לשם בקו ישר.
(א) חשבו את אורך המסלול שהחיפושית עשתה בהליכה.
(ב) חשבו את אורך המסלול שהחיפושית עשתה במעוף.

פתרון

(א) נשים לב ש־$z=1$ מתקבל עבור $t=1$, לכן עלינו לחשב

$$\ell=\int_{t=0}^{t=1}|d\vec{r}|=\int_0^1\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt$$

נחשב תחילה

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\cos t,\,-\sin t,\,\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)\to\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{1+\frac{9}{4}t}$$

ונציב באינטגרל:

$$\ell=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}t}\,dt=\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}-1\right)=\frac{1}{27}\left(13^{3/2}-8\right)$$

(ב) המרחק בקו ישר בין נקודת תחילת המעוף (המיקום ב־$t=1$)

$$\left(\sin(1),\cos(1),1\right)$$

לבין נקודת ההתחלה (המיקום ב־$t=0$)

$$(0,1,0)$$

הוא

$$\ell=\sqrt{\left(\sin(1)\right)^2+\left(\cos(1)-1\right)^2+1^2}=\sqrt{3-2\cos(1)}$$

תרגיל 6 - 2018 מועד ב

הוכיחו את הזהות הבאה על ידי שימוש בכתיב האינדקסים:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)=\vec{A}^2\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

פתרון

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=&\epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{i\ell m}A_\ell C_m\\=&\epsilon_{jki}\epsilon_{i\ell m}A_jB_kA_\ell C_m=\left(\delta_{j\ell}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{k\ell}\right)A_jB_kA_\ell C_m\\=&A_jA_jB_kC_k-A_jC_jA_kB_k=\vec{A}^2\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\end{aligned}$$

תרגיל 7 - 2020 מועד ב

חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\ e^{-x^2-y^2}$

(ב) $\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}dy\ \ \frac{\sin y}{y}$

פתרון

(א) נשים לב שזה כמו גאוסיאן רק עם שינוי בגבולות, אין כאן את כל המישור אלא רק את החצי העליון, כלומר כשנעבור לפולרי הגבולות יהיו

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\ e^{-x^2-y^2}=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dr\ re^{-r^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}du\ e^{-u}=\frac{\pi}{2}$$

(ב) נחליף את סדר הגבולות

$$\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}dy\ \ \frac{\sin y}{y}=\int_0^{y}dx\int_0^{\pi}dy\ \ \frac{\sin y}{y}=\int_0^{\pi}dy\ \ \sin y=-\cos y|_0^{\pi}=2$$

תרגיל 8 - 2020 מועד ב

חשבו את $f(\vec{r})$ אם נתון ש-$f(\vec{0})=0$ ו-

$$\vec{\nabla}f(\vec{r})=\left(\left(3x^2+y^2+z^2\right)y,\ \left(x^2+3y^2+z^2\right)x,\ 2xyz\right)$$

פתרון

הנגזרת החלקית לפי x

$$\partial_x f=\left(3x^2+y^2+z^2\right)y$$

$$\rightarrow f=\left(x^2+y^2+z^2\right)xy+C\left(y,z\right)$$

$$\partial_y f=x^3+3xy^2+xz^2+\partial_y C\left(y,z\right)=\left(x^2+3y^2+z^2\right)x$$

$$\partial_y C\left(y,z\right)=0$$

$$\rightarrow C\left(y,z\right)=C\left(z\right)$$

$$\partial_z f=2xzy+\partial_z C\left(z\right)=2xzy$$

$$\partial_z C\left(z\right)=0$$

$$\rightarrow C\left(z\right)=C$$

וקיבלנו

$$f=\left(x^2+y^2+z^2\right)xy+C$$

נציב

$$f(\vec{0})=C=0$$

ונקבל

$$f=\left(x^2+y^2+z^2\right)xy$$

תרגיל 9 - 2019 מועד ב

בדקו את משפט סטוקס

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F} = (y,\, \sin z,\, 0)$$

כאשר S הוא שטח הפנים של קובייה, פרט לפאה התחתונה שלה אשר מתוארת על ידי

$$0\le x\le 1\,,\quad 0\le y\le 1\,,\quad z=0$$

ומוגדרת לא להיות חלק מ-S. שאר הקובייה נמצאת ב-$z>0$.
עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) חשבו את $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר C היא השפה של S (כיוון המסלול הוא לבחירתכם).

(ב) חשבו את $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

(ג) חשבו את $\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS$ כאשר הצד אליו פונים וקטורי הנורמל $\hat{n}$ הוא בהתאמה עם כיוון המסלול שבחרתם לעיל.

פתרון

(א) נכתוב את האינטגרל כ-

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

השפה C מורכבת מצלעות הפאה התחתונה של הקוביה, ורק אחד משלושת האיברים תורם בכל צלע. נקבל

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dx + \int_0^1 0\,dy + \int_1^0 1\,dx + \int_1^0 0\,dy = -1$$

כאשר הלכנו נגד כיוון השעון.

(ב)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{F} =& \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & \sin z & 0 \end{vmatrix} \\
=& \hat{x}\left(0-\frac{\partial}{\partial z}\sin z\right) - \hat{y}\left(0-\frac{\partial}{\partial z}y\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin z - \frac{\partial}{\partial y}y\right) \\
=& (-\cos z,\, 0,\, -1)
\end{aligned}$$

(ג) מכיוון ש־$\vec{\nabla}\times\vec{F}$ אינו תלוי ב־x ו־y, אין תרומה לשטף מהפאות האנכיות כי השטף שנכנס דרך פאה אחת יוצא דרך הפאה שממול. נשאר לחשב את השטף היוצא דרך הפאה העליונה, שנסמנה P. בהתאם לבחירת הכיוון של C בסעיף (ב), $\hat{n}=+\hat{z}$, אז מקבלים

$$\iint_P \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS=\iint_P(-\cos z,0,-1)\cdot(0,0,1)\;dS=-\iint_P dS=-1$$