תנודות הרמוניות

מילות מפתח:

תנודה הרמונית פשוטה, תדר עצמי, מטוטלת מתמטית.

הציוד הדרוש: מחשב, ממשק, חיישן כוח, חיישן תנועה, Rotary motion sensor, סרגל.

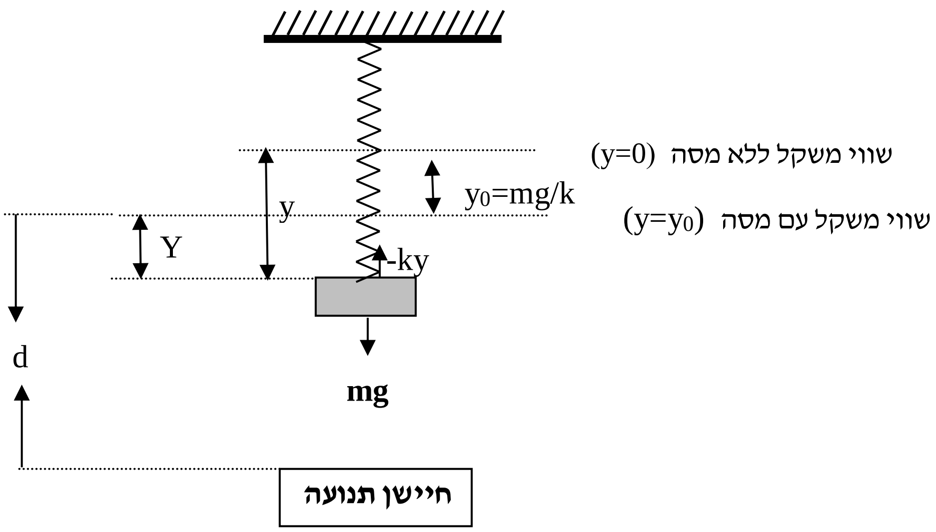
מטרות הניסוי:

- חקירת תנודה הרמונית פשוטה באמצעות קפיץ עמוס במסה ובמטוטלת מתמטית (משואת מקום, מהירות, תאוצה וגלגולי אנרגיה).

1. תיאוריה

1.1 תנועה הרמונית פשוטה

מגדירים תנועה הרמונית פשוטה כאשר על מערכת מכנית פועל כוח שהוא פרופורציונלי ישר למרחק ובכיוון מנוגד לו ($F=-kx$). נתבונן במסה התלויה על קפיץ (איור 1), הכוחות הפועלים על המסה הם כוח הכבידה mg והכוח המחזיר של הקפיץ ky- (נסמן את הכיוון החיובי כלפי מטה, ואת מצב הקפיץ הרפוי y=0).



איור 1: תאור סכמטי של הקפיץ, המסה והכוחות הפועלים.

המצב $y_0=mg/k$ נקרא מצב שיווי המשקל של המערכת. נסמן את ההעתק ממצב שיווי משקל ב Y כלומר $Y = y - y_0$. משואת התנועה של המסה **יחסית לנקודת שיווי המשקל** (האפס בשיווי משקל) כשהמסה תלויה נתונה במשואה 1:

$$m\frac{d^2Y}{dt^2} = m\ddot{Y} = -kY \qquad (1)$$

אם נחלק את משוואה (1) ב- m ונעביר אגפים נקבל את המשוואה האופיינית לתנודה הרמונית פשוטה:

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = 0 \qquad (2)$$

כאשר: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ω הוא התדר העצמי של המערכת. הפתרון Y(t) של משוואה (2) הוא פתרון מחזורי בתדר ω, המכיל שני קבועי אינטגרציה: האמפליטודה A והמופע ההתחלתי φ_0.

$$Y(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\sin(\omega \mathrm{t} + \varphi_0) \qquad (3)$$

מהירות המסה נתונה ע"י הנגזרת הראשונה של המקום לכן גם המהירות היא פונקציה מחזורית והרמונית:

$$v(\mathrm{t}) = \frac{dY(t)}{dt} = \dot{Y}(\mathrm{t}) = \omega \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t} + \varphi_0) \qquad (4)$$

הכוח שהקפיץ מפעיל על המסה פרופורציוני לתאוצה כלומר לנגזרת השנייה של המקום Y(t) לפי הזמן ולכן, גם הכוח יתואר ע"י פונקציה הרמונית כתלות בזמן. הכוחות הפועלים על המסה הם כוחות משמרים ובהזנחת החיכוך נוכל לומר שהאנרגיה נשמרת. במהלך התנועה הופכת האנרגיה הקינטית לאלסטית (קפיץ) וחוזר חלילה. האנרגיה הכוללת הנה קבועה וניתנת בביטוי הבא:

$$E(\mathrm{t}) = \frac{mv(t)^2}{2} + \frac{kY(t)^2}{2} = \mathrm{constant} \qquad (5)$$

האיבר הראשון באגף ימין של המשוואה מבטא את האנרגיה הקינטית והשני את האנרגיה הפוטנציאלית, E היא האנרגיה הכוללת.

נוכל לחשב את ערך האנרגיה E אם נתבונן בנקודה הרחוקה ביותר אליה מגיעה המסה, בנקודה זו המרחק ממצב שיווי משקל שווה לאמפליטודה A, והמהירות מתאפסת (v=0), לכן האנרגיה הכוללת היא: $\frac{1}{2}kA^2$. אם נחלק את משוואה (5) ב E ונציב את הערך שקיבלנו עבור האנרגיה נוכל לרשום:

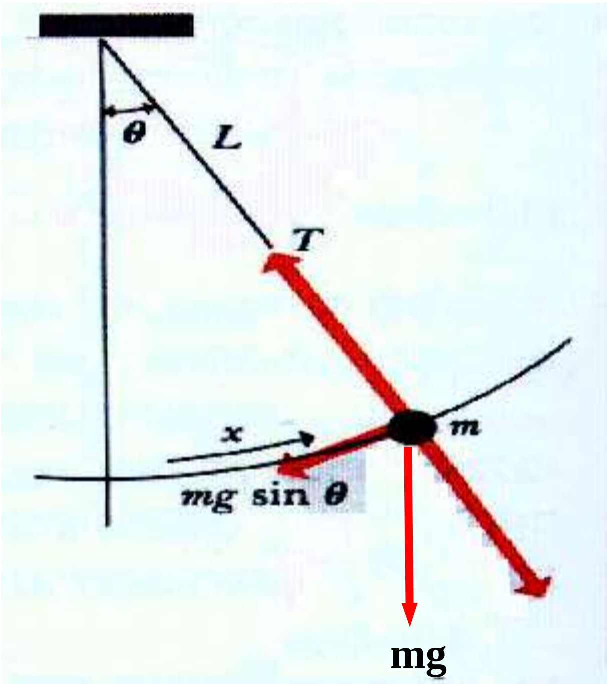
$$\frac{\mathrm{v(t)}^2}{\omega^2 \mathrm{A}^2} + \frac{\mathrm{Y(t)}^2}{\mathrm{A}^2} = 1 \qquad (6)$$

משוואה (6) הינה משוואת אליפסה במישור (Y, V).

- ניתן לבצע סימולציה לקפיץ אנכי ותנועה הרמונית.

1.2 המטוטלת המתמטית

המונח מטוטלת מתמטית מתייחס למסה נקודתית m הקשורה לחוט דק חסר משקל באורך L, והמסוגלת לבצע תנודות מעגליות קטנות במישור. מצב שיווי המשקל הינו המצב בו המשקולת נמצאת בנקודה הנמוכה ביותר. נסמן את הסטייה הזוויתית ממצב שיווי המשקל באמצעות הזווית θ, אורך המסלול (האורך של הקשת) Lθ. ראו איור- 2



איור 2 : מטוטלת מתמטית והכוחות שפועלים עליה

הכוחות הפועלים על המסה הם הכוח הגרביטציוני mg וכוח המתיחות במוט T. הכוח המופעל ע״י המוט מאונך לכיוון תנועת המסה ולכן לא משפיע על התנועה, רכיב הכוח הגרביטציוני בכיוון התנועה הוא : $-mg\sin\vartheta$. העתק הוא $x = L\vartheta$ (ϑ נמדדת ברדיינים)

משוואת התנועה עבור המטוטלת :

$$m\ddot{x} = mL\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta \qquad (7)$$

הגודל $L\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}$ הוא התאוצה ההיקפית.

באופן כללי התנודה שמבצעת המסה אינה תנודה הרמונית, ותיאור התנודה הוא מורכב יותר. אך אם התנודות הן קטנות התנודה תהיה בקירוב טוב תנועה הרמונית.

א- תנודות קטנות:

אם נניח שהמטוטלת מתנודדת בתנודות קטנות, נוכל להשתמש בקירוב $\sin\vartheta \approx \vartheta$.
נציב זאת במשוואה (7) ונקבל:

$$m\ddot{x} = mL\ddot{\vartheta} = -mg\vartheta \rightarrow \ddot{\vartheta} + \frac{g}{L}\vartheta = 0 \qquad (8)$$

והתנודה מתוארת במשוואה הדומה למשוואה (2) כאשר, תדר התנודה הוא

$\omega^2 = \frac{g}{L}$. שים לב לכך שהתדר אינו תלוי במסה ולא באמפליטודת התנודות, הוא
תלוי רק באורך המטוטלת L (שעון מטוטלת).

ב- תנודות גדולות:

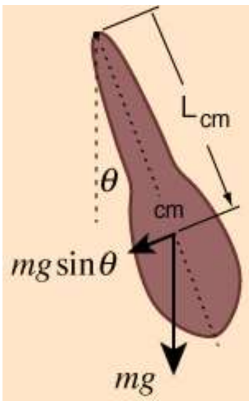
כאשר התנודות הן גדולות, התנועה אינה הרמונית אך בכל זאת יש לנו תנועה מחזורית. במקרה כזה ניתן למדוד את זמן המחזור של התנודות. בניגוד לתנודות קטנות, כאן זמן המחזור תלוי באמפליטודה ואינו קבוע.

ג- פתרונות נוספים:

למשוואת המטוטלת קיימים פתרונות נוספים לא הרמוניים. לדוגמה תנועה מעגלית בה המטוטלת מבצעת סיבובים ומסתובבת כל הזמן באותו כיוון. תנועת ה"סוליטון" בה המשקולת מתחילה בשיא הגובה, מבצעת סיבוב אחד ונעצרת שוב בשיא הגובה (כאשר ישנו מוט במקום חוט), משך הסוליטון הוא אינסופי.
אופי הפתרון נקבע על פי תנאי ההתחלה, כלומר, המיקום והמהירות ההתחלתיים יקבעו האם הפתרון יהיה הרמוני או סיבובי ומה האמפליטודה וכד'.

1.3 המטוטלת הפיזיקלית

במטוטלת מתמטית מתייחסים למסה הקשורה לחוט דק חסר משקל באורך L.
במציאות גם לחוט יש מסה וצריך להתחשב בה. למטוטלת שבנויה מגוף בעל מסה מסוימת אנו קוראים מטוטלת פיזיקלית. נתבונן במערכת הבאה:



איור 3: תרשים כוחות למטוטלת פיזיקלית

ברגע שהגוף מוסט בזווית θ, על הגוף פועל מומנט מחזיר τ במרכז הכובד של הגוף (L_{cm})

$$\tau = \vec{F} \times \vec{l} = -mgL_{c.m}\sin\theta \qquad (9)$$

משוואת התנועה של הגוף:

$$\sum \tau = I\alpha = I\ddot{\theta} \rightarrow -mgL_{c.m}\sin\theta = I\ddot{\theta} \qquad (10)$$

כאשר I הוא מומנט ההתמד ו- α התאוצה זוויתית.

שוב עבור זוויות קטנות מתקיים: $I\ddot{\theta} = -mgL_{c.m}\theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\dfrac{mgL_{c.m}}{I}\theta$ (11)

נסמן את התדירות העצמית: $\omega^2 = \dfrac{mgL_{c.m}}{I}$ ונקבל: $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ (12)

כלומר הגוף מבצע תנועה הרמונית עם ω .

מקרה פרטי בו מסה נקודתית מתנודדת במטוטלת, מומנט ההתמד:

$$I = mr^2 \qquad (13)$$

כאשר r הוא המרחק של המסה מציר הסיבוב.

בניסוי שלנו נתייחס למסה של המוט והמשקולת כאל מסה נקודתית ולכן התדירות שנצפה היא דומה למטוטלת המתמטית.

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (14)$$

רדיוס הסיבוב r שווה למרחק $L_{c.m}$ מציר הסיבוב עד מרכז המסה של המערכת (בהזנחה של מסת המוט)

❖ ניתן לבצע סימולציה למטוטלת עם פרמטרים שונים.

1.4. שאלות הכנה

1. בדוק שהפתרון במשוואה (3) הוא אכן פתרון של משוואה (2). הראה שניתן להציג את משוואה (3) כסכום של סינוס וקוסינוס באותו תדר אך באמפליטודות שונות $Y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$
2. בדוק מהו תחום הזוויות בהן ניתן להשתמש בקירוב של תנודות קטנות עד שגיאה של 1%. (שים לב שזווית נמדדת ברדיאנים).
3. הראה שאם מעתיקים את האפס מנקודת הרפיון לנקודת שיווי המשקל בניסוי של קפיץ עמוס מסה, אזי ניתן לכתוב את האנרגיה הכללית (קינטית, גרביטציונית ואלסטית), כסכום של האנרגיה הקינטית והאלסטית בלבד בצורה של משוואה 5.

4. הסבר באופן איכותי כיצד היו התוצאות אם היינו לוקחים בחשבון שיש חיכוך במהלך התנועה.
5. מה יהיה קבוע הקפיץ השקול של שני קפיצים K_1 ו- K_2 המחוברים ביניהם בטור?
6. מה יהיה קבוע הקפיץ השקול של שני קפיצים K_1 וK_2 המחוברים ביניהם במקביל (בהנחה ששנהם נמתחים לאותו האורך)
7. נתון קפיץ עם קבוע קפיץ K. הקפיץ נגזר לשני חלקים שווים מה יהיה זמן המחזור ותדירות התנודה של חצי הקפיץ בהנחה שמתנודדת עליו מסה m.
8. גוף מתנודד אנכית על קפיץ שקבוע הקפיץ שלו K, במעבדה נמדד עבורו זמן תנודה T .כיצד ישתנה זמן התנודה אם הניסוי יבוצע בכוכב בו כוח הכובד הוא חצי מכדור הארץ? נמק!

2. מהלך הניסוי

2.1 מערכת הניסוי

מערכת הניסוי בה נשתמש מורכבת ממסה התלויה על קפיץ, חיישן מרחק למדידת מקום המסה, חיישן כוח למדידת הכוח בקפיץ, ממשק המחובר למחשב ותוכנת DataStudio לקליטה ועיבוד הנתונים.

חיישן מרחק- פעולת חיישן המרחק מתבססת על גלי קול (בתחום האולטרא סאונד), החיישן שולח פולס של גל קול, הפולס מתקדם פוגע בעצם ומוחזר אל החיישן. משך הזמן משילוח הפולס עד לקליטתו בחזרה נמדד, ובידיעת מהירות הקול, מחושב המרחק. החיישן מסוגל לשלוח פולסי קול בקצב מקסימלי של 120 Hz כלומר 120 פולסים בשניה והמרחק המינימלי שהוא יכול למדוד הוא כ-15 ס״מ. נתוני המרחק מועברים מהחיישן אל הממשק באופן דיגיטלי.

חיישן כוח- פעולת חיישן הכוח מבוססת על גביש פיזואלקטרי המייצר מתח חשמלי פרופורציוני לכוח המופעל על הגביש. המתח מועבר באופן אנלוגי אל הממשק אשר מתרגם אותו לכוח.

ממשק הניסוי- הממשק מאפשר קליטת נתונים מחיישנים והעברתם אל המחשב, שם הם מעובדים באמצעות תוכנת DataStudio.

<u>תוכנת DataStadio</u>- התוכנה מאפשרת הגדרת מערך החיישנים ונתוני המדידה, הפעלת ועצירת ניסוי, הצגת הנתונים בצורת טבלה, גרף וכד' ועיבוד הנתונים. שתי מערכות הניסוי מתוארת באיור 3.

בחלקו הראשון של הניסוי נמדוד את הכוח שהקפיץ מפעיל כפונקציה של הזמן באמצעות חיישני הכוח והתנועה. כמו כן נמדוד את המקום והמהירות של המסה כפונקציה של הזמן באמצעות חיישן התנועה.

נציג את ההעתק כפונקציה של הזמן ונמדוד את זמן המחזור של תנודה אחת. מכאן נחלץ פרמטרים, כגון התדר והאמפליטודה. נבחן את האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית וכן נבדוק את תקיפתה של משוואה (6).

חיישן כוח

חיישן תנועה מעגלית

קפיץ

מוט דק

מחזיק מסה

מסה נקודתית

חיישן תנועה

ממשק המעבדה

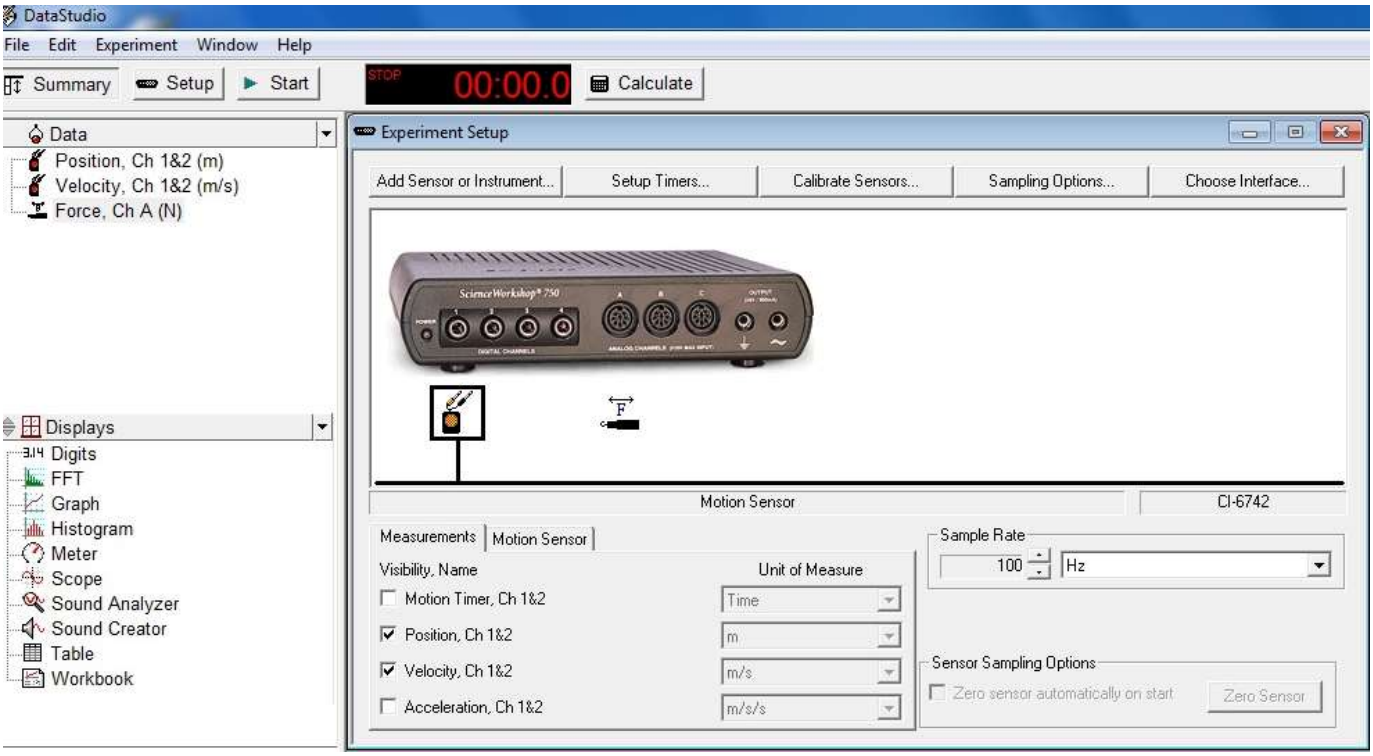
איור 4: מערכת הניסוי הכוללת קפיץ עם מסה, חיישן כוח ומטוטלת מתמטית התלויה על חיישן תנועה מעגלית.

2.2. הנחיות ביצוע

2.2.1. תדירות עצמית של קפיץ עמוס מסה

1. **הפעלת המערכת הניסיונית:** אם המחשב אינו עובד, הפעילו תחילה את ממשק המעבדה ואח"כ הפעילו את המחשב, תפתחו את תוכנת DataStudio ע"י לחיצה כפולה על DataStudio .

2. **בחירת החיישנים:** תבחרו את המצב "Create Experiment", ייפתח חלון Experiment Setup, עליכם להגדיר את החיישנים בהם תשתמשו. תלחצו על שקע A ותבחרו חיישן כוח Force Sensor. תלחצו על השקע 1 ותבחרו חיישן המרחק/תנועה Motion Sensor. המצב מתואר באיור 4.



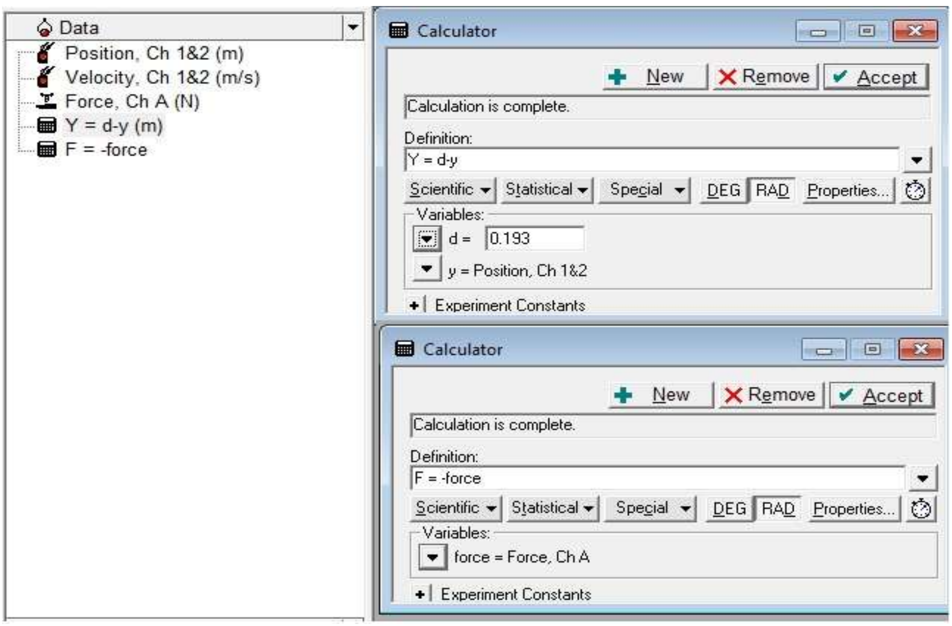
איור 5: תיאור של חלון התוכנה DataStudio

3. **הגדרת חיישן הכוח:** תלחצו על חיישן הכוח וקבעו בחלון מתחת לתמונת הממשק את קצב המדידה (sample rate) עבור תנועה הרמונית בקפיץ ל-100Hz.

4. **הגדרת חיישן התנועה:** תלחצו על חיישן המרחק , תבחרו את מדידת המקום והמהירות בלבד וקבעו את קצב המדידה ל- 100 Hz בדומה לסעיף הקודם (3).

5. **תיאור חלון התצוגה של המחשב לאחר ההגדרות**: תסגרו את חלון Experiment Setup. בחלקו השמאלי של חלון העבודה ישנם שני חלונות, העליון Data מכיל את הנתונים מהניסויים השונים (כרגע מופיעים בו כוח Force, מקום Position ומהירות Velocity). החלון התחתון מכיל את אפשרויות התצוגה, בניסוי זה נשתמש ב Digits-תצוגה ספרתית ו-Graph-תצוגה בגרף.
6. **קביעת המרחק ההתחלתי (d) בין מחזיק המשקולות וחיישן התנועה**: תתלו את מחזיק המשקולות ומסה של 200gr על הקפיץ, תנו למערכת להתייצב, תלחצו על כפתור Digit בחלון הנראה באיור 5 ותבחרו Position, תלחצו על start ורישמו על דף את המספר הנראה בחלון, שהוא בעצם המרחק ההתחלתי בין מחזיק המשקולות וחיישן התנועה-constant1 שיוגדר באות d בתוכנה (ראו איור 1).
7. **הגדרת גדלים הנמדדים בעזרת Calculate:**

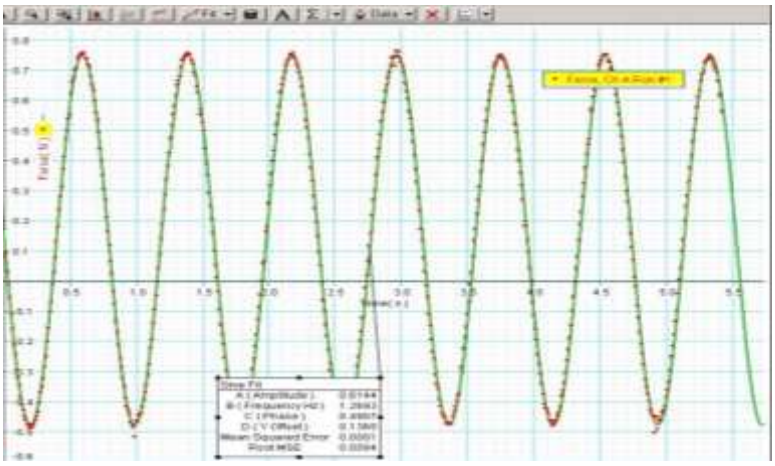
תלחצו על Calculate. בתוך החלון Definition הגדירו משתנה חדש Y=d-y. בחלון Variables, הגדירו את d כ-constant (ע"י לחיצה על החץ מצד שמאל) והכניסו את הערך שקיבלתם בסעיף הקודם. הגדירו את y כמשתנה position ע"י לחיצה על החץ מצד שמאל ובחירת Data measurement. תלחצו על Accept לאישור השינוי. תלחצו על properties והגדירו את יחידות המשתנים. תלחצו על new והגדירו משתנה חדש F=-force. הגדירו את force כמשתנה Force ע"י לחיצה על החץ מצד שמאל ובחירת Data measurement.



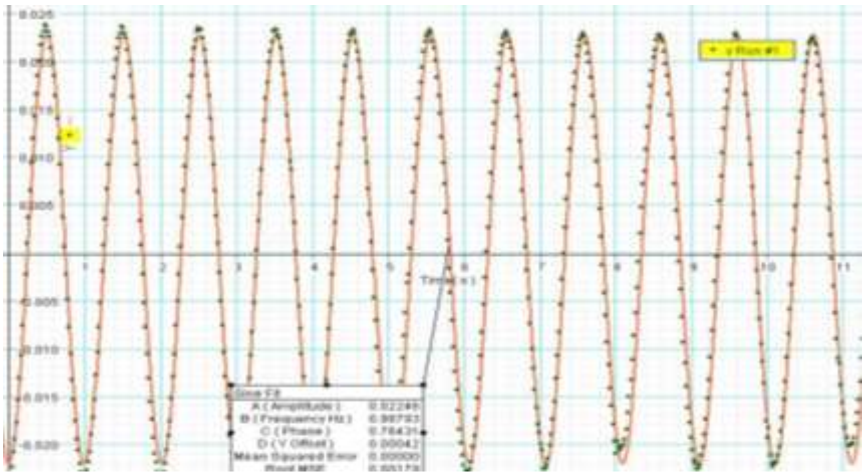
איור 6: חלון הגדרת גדלים הנמדדים בעזרת Calculate

8. **איפוס חיישן הכוח:** תלחצו על כפתור Tare הנמצא על חיישן הכוח, בלי להוריד את המשקולות, על מנת לאפס את החיישן.

9. **ביצוע הניסוי וקליטת הנתונים:** תמשכו את המסה מטה כ 1-2 ס"מ סנטימטרים, שחררו אותה ותלחצו על start להתחלת המדידה. לאחר כ- 5 שניות תלחצו על Stop . בנו גרפים נפרדים של: כוח כפונקציה של זמן, העתק (Y(t)) כפונקציה של זמן ומהירות כפונקציה של זמן והתאימו פונקציית סינוס לכל הגרפים שקיבלתם. (גרפים של כוח והעתק כפונקציה של זמן נראים לדוגמא באיורים 6 ו- 7).

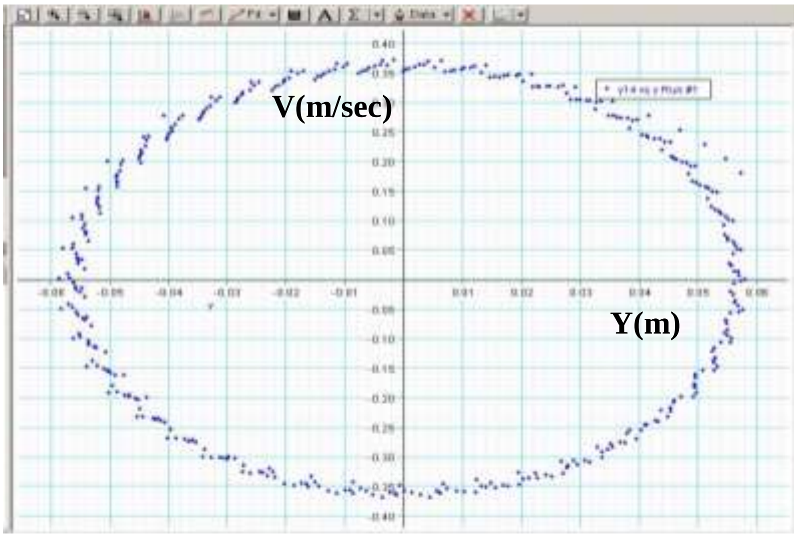


איור 7: הכוח האלסטי בניוטונים (ציר אנכי) כפונקציה של זמן שניות (ציר אופקי).



איור 8: ההעתק במטרים (ציר אנכי) כפונקציה של זמן שניות (ציר אופקי).

10. **שימור אנרגיה:** על מנת לבדוק את תקיפותה של משוואה 6 ציירו גרף של מהירות כפונקציה של העתק. בונים גרף של מהירות כפונקציה של זמן ומחליפים את ציר הזמן בציר ההעתק, לשם כך יש ללחוץ על המילה Time מתחת לציר x ולבחור Y(m) , מתקבל גרף דומה לאיור 9 .



איור 9: מהירות במטרים לשניה (ציר אנכי) כפונקציה של העתק במטרים (ציר אופקי).

2.3 עיבוד התוצאות

א. מתוך התאמות לגרפים שקיבלתם בסעיפים 9 ו 10 תמצאו את הפרש הפאזה בין העתק המסה למהירות המסה, ותבדקו אם אכן כאשר ההעתק מקסימלי, המהירות היא אפס וכשהמהירות מקסימלית ההעתק אפס.

ב. מתוך התאמת סינוס לגרפים שקיבלתם בסעיף 9 מצאו את זמן המחזור והאמפליטודה של התנועה. חישבו את המהירות הזוויתית (התדירות).

ג. חישבו את קבוע הקפיץ מהגרף.

ד. תבדקו את חוק שימור האנרגיה לפי נוסחה (5).

ה. מהגרף של מהירות כפונקציה של ההעתק (כמו איור 9) חישבו את האמפליטודה והמהירות הזוויתית (היעזרו בנוסחה 6) והשוו עם התוצאות שקיבלתם מגרף ההעתק כפונקציה של הזמן (כמו איור 8).

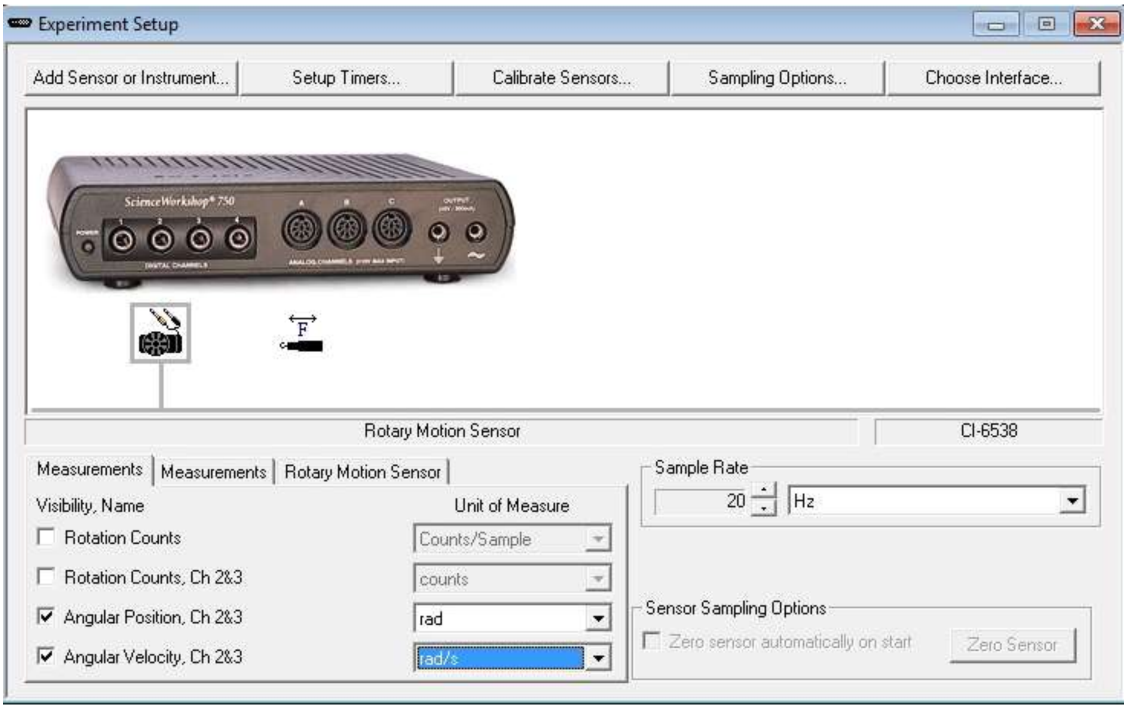
2.4 המטוטלת המתימטית

מערכת הניסוי מורכבת מחיישן תנועה מעגלית (Rotary motion sensor) למדידת הזוית ומסה התלויה בקצה מוט שאפשר לחברה לחיישן (איור 3). תלחצו על השקע 3 ותבחרו חיישן תנועה סיבובית (Rotary motion sensor).

אנו נבחן את התנהגות המטוטלת בתנודות קטנות בלבד, ונמדוד את תלות התדר באורך המוט ובמסה.

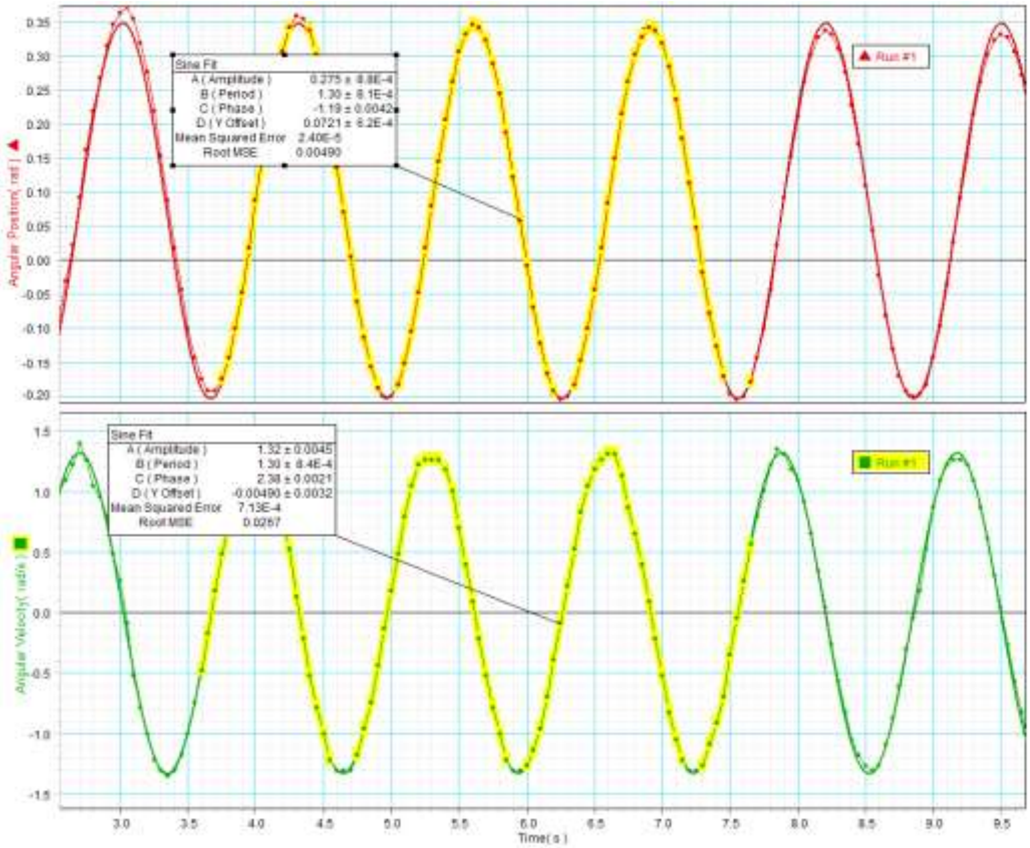
2.4.1 הנחיות ביצוע ועיבוד תוצאות

בנו את המערכת כפי שמתואר באיור 3 . תבחרו את החיישן Rotary Motion Sensor. קבעו את ה sample rate ל -20 Hz בחיישן, בכרטיסיית Rotaty Motion Sensor תבחרו ב- High resolution (1440 divisions/rotation). החיישן מחובר לממשק בכניסות 3 ו- 4 באופן דומה לחיישן התנועה, (איור 4). הגדירו את הגדלים הנמדדים : **מהירות זוויתית ברדיאנים לשניה, מיקום זוויתי ברדיאנים** (איור 9).



איור 10: חלון החיישן Rotary Motiom Sensor

תפתחו גם כאן שני גרפים: מיקום זוויתי כפונקציה של זמן ומהירות זוויתית כפונקציה של זמן. תלחצו על Start, הסיטו את המטוטלת בזווית קטנה (עד 30^o), הרפו והיווכחו שהמיקום הזוויתי והמהירות הזוויתית הם פונקציות הרמוניות (איור 11).



איור 11: הזווית ברדיאנים (ציר אנכי בגרף העליון) והמהירות ברדיאנים לשניה (ציר אנכי בגרף התחתון) כפונקציה של זמן בשניות בשני הגרפים, אורך המוט 41cm.

בחלק הראשון של הניסוי, תבחנו את ההשפעה של רדיוס המטוטלת L (אורך המוט עד למרכז המסה) על המהירות הזוויתית.

1. תלחצו על start, הסיטו מעט את המטוטלת הצידה (1-2 cm), הרפו ממנה.
2. חזרו על 1 עבור שני רדיוסים L נוספים של המטוטלת
3. בצעו התאמה סינוס לתוצאות שקיבלתם.
4. תמדדו את זמן המחזור בכל גרף עבור כל רדיוס שלקחתם וחישבו את המהירות הזוויתית. תבדקו אם אכן מתקיים הקשר $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
5. בנו גרף של ω^2 כפונקציה של $1/L$, חישבו מתוך הגרף את הערך של תאוצת הכובד g והעריכו את השגיאה.

בחלק השני של הניסוי, תבחנו את ההשפעה של גודל המסה על המהירות הזוויתית בשיטה הבאה.

1. קבעו את הרדיוס והוסיפו משקולות על מנת לשנות את המסה.
2. תלחצו על start , הסיטו מעט את המטוטלת הצידה (1-2 cm), והרפו ממנה.
3. חזרו על 2 עבור מסה נוספת מוצבת על המשקולת הבסיסית.
4. התאימו פונקציית סינוס לכל התוצאות שקיבלתם.
5. חישבו את המהירות הזוויתית מתוך זמן מחזור עבור כל מדידה.
6. קבעו איך משתנה המהירות הזוויתית כפונקציה של המסה.

בחלק השלישי של הניסוי, תבחנו את חוק שימור האנרגיה.

הגדירו בחלון calculate את המשוואה של האנרגיה:

$$E(t)=\frac{1}{2}mL^2\omega^2+mgL(1-\cos\theta) \qquad (15)$$

המשוואה לפני הכנסת נתונים תראה כך:

E=0.5*m*pow(L,2)*pow(w,2)+m*g*L*(1-cos(O))

כאשר: $v=L\omega$ ו- h=L (1-cosθ)

בחלון calculate הגדירו את θ כ-(rad) angular position והגדירו את ω כ-angular velocity.

שימרו על סדר פעולות:

- תלחצו על start
- הסיטו את המטוטלת בזווית קטנה (עד 30^o).
- הרפו

1. ציירו גרף של אנרגיה כוללת כפונקציה של זמן, וודאו זמן מדידה ארוך מספיק (לפחות 15 שניות).
2. האם האנרגיה קבועה? מה הפונקציה המתאימה ביותר לנתונים? (קבוע, לינארי, אקפוננציאלי).
3. מהו הזמן האופייני של דעיכת האנרגיה במערכת - הזמן שלוקח לאנרגיה לקטון פי e מערכה המקורי? **(היעזרו בייצוא התוצאות בצורת Data**