אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: 9.3.2022
שמות המרצים: ד״ר אבגני כץ, ד״ר אלעד שופן
שמות המתרגלים: שמעון חבר, מריאנה בלפרמן
שם הקורס: מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
מספר הקורס: 203.1.1141
שנה: 2022 סמסטר: א׳ מועד: ב׳
משך הבחינה: 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכל היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

1. [15 נק'] חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx$

פתרון:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\,dx$$

$$\begin{aligned}
4I^2 &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\,dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy\, e^{-(x^2+y^2)/2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2/2} \\
&= 2\pi \int_0^\infty du\, e^{-u} \\
&= 2\pi \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^\infty \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(ב) $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2/2}\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^3 e^{-x^2/2}\,dx &= 2\int_0^\infty u\, e^{-u} du \\
&= 2\left(u\left(-e^{-u}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-u}\right) du\right) \\
&= 2\left(0 + \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^\infty\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. [15 נק'] קרבו את הפונקציה

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

עבור $x \gg 1$ על ידי טור של חזקות של $\frac{1}{x}$ עד סדר $\frac{1}{x^3}$, כולל.

רמז: יכול להיות שימושי לעבוד עם המשתנה $u = \frac{2}{x}$.

פתרון:

נגדיר משתנה u כפי שמופיע ברמז. נשים לב שעבור $x \gg 1$ מתקיים $u \ll 1$. נרשום את הפונקציה במונחים של u ונעשה פיתוח טיילור סביב $u = 0$:

$$f(u) = \arctan\left(\frac{1}{u}\right) \qquad f(0) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(u) = \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right) = -\frac{1}{u^2+1} \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(u) = \frac{2u}{(u^2+1)^2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(u) = \frac{2}{(u^2+1)^2} + \frac{2u\,(-2)\,2u}{(u^2+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$\begin{aligned} f(u) &= f(0) + f'(0)\,u + \frac{1}{2}f''(0)\,u^2 + \frac{1}{6}f'''(0)\,u^3 + \dots \\ &= \frac{\pi}{2} - u + 0 + \frac{1}{3}\,u^3 + \dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{x} + \frac{8}{3}\,\frac{1}{x^3} + \dots$$

3. [25 נק'] בדקו את משפט סטוקס

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

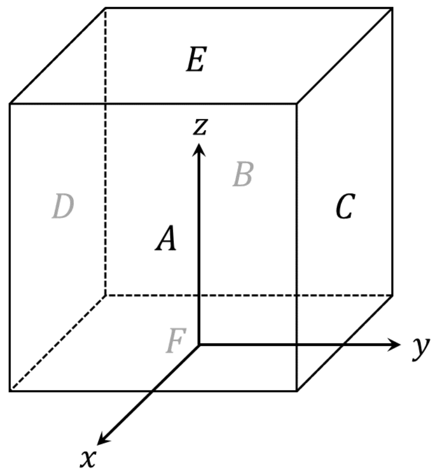
על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F} = (x+y,\, -y-z,\, x+y)$$

כאשר S הוא שטח הפנים של קובייה, פרט לפאה התחתונה שלה (פאה F באיור) אשר מתוארת על ידי

$$-1 \le x \le 1\,, \quad -1 \le y \le 1\,, \quad z = 0$$

ומוגדרת לא להיות חלק מ־S.



עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) [10 נק'] חשבו את

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

כאשר C היא השפה של S (כיווניות המסילה היא לבחירתכם).

פתרון:

השפה של S היא ההיקף של הפאה F. על כן נגדיר את מסלול האינטגרציה הבא במישור xy:

$$C: \quad (-1,-1) \to (1,-1) \to (1,1) \to (-1,1) \to (-1,-1)$$

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-1}^{1} (x+(-1))\, dx + \int_{-1}^{1} (-y-0)\, dy - \int_{-1}^{1} (x+1)\, dx - \int_{-1}^{1} (-y-0)\, dy \\ &= -2\int_{-1}^{1} dx \\ &= -4\end{aligned}$$

(ב) [5 נק'] חשבו את $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

פתרון:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & -y-z & x+y \end{vmatrix} = (2,-1,-1)$$

(ג) [10 נק'] חשבו את

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS$$

כאשר הכיווניות של $\hat{n}$ היא בהתאמה עם כיווניות המסילה שבחרתם לעיל.

פתרון:

נחשב את האינטגרנד $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}$ עבור כל אחת מהפאות המרכיבות את S, כאשר $\hat{n}$ פונה החוצה מהקובייה, בהתאמה עם כיוון המסילה שבחרנו בסעיף (א):

$$\begin{aligned} A: &\qquad \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot(+\hat{x}) = 2 \\ B: &\qquad \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot(-\hat{x}) = -2 \\ C: &\qquad \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot(+\hat{y}) = -1 \\ D: &\qquad \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot(-\hat{y}) = 1 \\ E: &\qquad \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot(+\hat{z}) = -1 \end{aligned}$$

בכל המקרים האינטגרנד איננו תלוי במיקום על הפאה, לכן ניתן פשוט להכפילו בשטח הפאה, 4. סכימה על כל הפאות נותנת

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS = -4$$

4. [15 נק'] מצאו את הפתרון הכללי $x(t)$ למשוואה

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = \sinh t$$

רמז: כדאי לנסות פתרון פרטי מהצורה $x(t) = A\sinh t + B\cosh t$.

פתרון:

נתחיל מלפתור את המשוואה ההומוגנית

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$$

ננחש פתרון מהצורה $x(t) = e^{rt}$, נציב אותו במשוואה ונקבל את המשוואה האופיינית

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

פתרונות המשוואה האופיינית הם

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 2$$

כך שהפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא

$$x(t) = a_1 e^{3t} + a_2 e^{2t}$$

עבור המשוואה הלא־הומוגנית, ננחש פתרון פרטי מהצורה הנתונה ברמז ונציבו במשוואה:

$$A\sinh t + B\cosh t - 5\left(A\cosh t + B\sinh t\right) + 6\left(A\sinh t + B\cosh t\right) = \sinh t$$

מכיוון ש־$\sinh t$ מתאפס ב־$t = 0$, בעוד ש־$\cosh t$ לא, המקדמים של $\cosh t$ צריכים להתאפס בינם לבין עצמם. ואז שאר האיברים, כלומר אלה הפרופורציוניים ל־$\sinh t$, צריכים גם כן להתאפס בינם לבין עצמם. משני תנאים אלה מתקבלת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 7B - 5A = 0 \\ 7A - 5B = 1 \end{cases}$$

שהפתרון שלה הוא

$$A = \frac{7}{24}, \quad B = \frac{5}{24}$$

מכאן שהפתרון הכללי למשוואה הוא

$$x(t) = a_1 e^{3t} + a_2 e^{2t} + \frac{7}{24}\sinh t + \frac{5}{24}\cosh t$$

5. [15 נק'] חשבו או פשטו ככל האפשר את הביטויים הבאים (הרשומים בהסכם הסכימה), בלי שאינדקסים יופיעו בתשובות הסופיות:

(א) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$

פתרון:

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} = \delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = 3$$

(ב) $\epsilon_{ijk}A_iB_jA_k$ כאשר $\vec{A}$ ו־$\vec{B}$ הם וקטורים.

פתרון:

מכיוון ש־ϵ_{ijk} אנטי־סימטרי תחת החלפת i ו־k, בעוד שהמכפלה A_iA_k סימטרית, אחרי הסכימה על i ו־k מקבלים 0.

לחלופין, ניתן לרשום

$$\epsilon_{ijk}A_iB_jA_k = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = 0$$

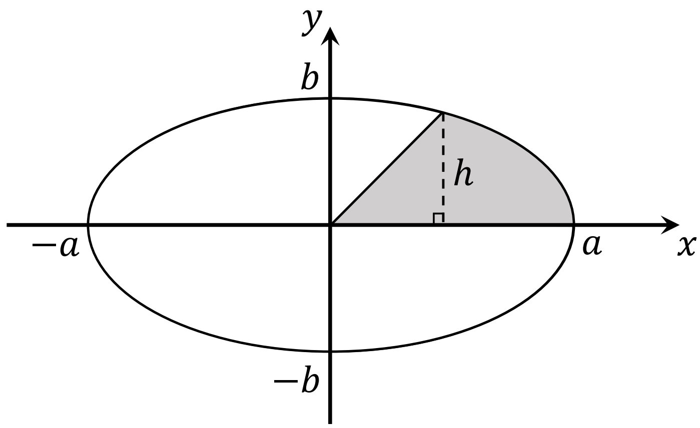
כאשר בשלב האחרון השתמשנו בכך ש־$\vec{B}\times\vec{A}$ מאונך ל־$\vec{A}$ ולכן מכפלתו הסקלרית עם $\vec{A}$ מתאפסת.

(ג) $\epsilon_{ijk}\partial_k(\epsilon_{ji\ell}\partial_\ell\phi)$ כאשר ϕ הוא שדה סקלרי.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\partial_k(\epsilon_{ji\ell}\partial_\ell\phi) &= -\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij\ell}\partial_k\partial_\ell\phi \\
&= -\left(\delta_{jj}\delta_{k\ell} - \delta_{j\ell}\delta_{kj}\right)\partial_k\partial_\ell\phi \\
&= -\left(3\delta_{k\ell} - \delta_{k\ell}\right)\partial_k\partial_\ell\phi \\
&= -2\,\delta_{k\ell}\partial_k\partial_\ell\phi \\
&= -2\,\vec{\nabla}^2\phi
\end{aligned}$$

6. [15 נק'] בטאו את שטחה של גזרת האליפסה המוצגת באיור (התחום האפור) במונחים של a, b ו־h.



רמז: משוואת האליפסה היא

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

יכול להיות שימושי לעבור לקואורדינטות בהן האליפסה תהפוך למעגל.

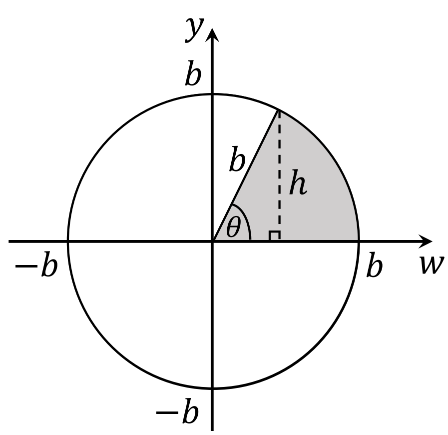
פתרון:

נכווץ את האליפסה בכיוון האופקי על ידי החלפת המשתנה x ב־w לפי

$$w = \frac{b}{a}x$$

כך שבמונחים של w ו־y היא הופכת למעגל עם רדיוס b:

$$w^2 + y^2 = b^2$$



שטח העיגול הוא πb^2, כך ששטח גזרת העיגול שלנו הוא

$$S_0 = \frac{\theta}{2\pi}\pi b^2 = \frac{\theta}{2}b^2 = \frac{b^2}{2}\arcsin\left(\frac{h}{b}\right)$$

ומכיוון ש־

$$dx\,dy = \frac{a}{b} dw\,dy$$

שטח גזרת האליפסה הוא

$$S = \frac{a}{b} S_0 = \frac{ab}{2} \arcsin\left(\frac{h}{b}\right)$$