

# מבחן 2021 מועדב'

## 1. גלים ותנועות הרמוניות

### סעיף א

ידוע כי מתקיים הקשר  $f = \frac{V}{\lambda}$ , כאשר  $V = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  כלומר

$$f = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

כיוון שאורך המיתר קבוע, אורך הגל קבוע, וכמו כן הצפיפות קבועה. הפרמטר היחיד שמשתנה הוא המתיחות. המתיחות במיתר היא  $T = mg$ . כדי לקבל תדר כפול עלינו להכפיל את המתיחות פי 4.

$$2f = \sqrt{\frac{T'}{\rho}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$2\sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{T'}{\rho}} \cdot \frac{1}{\lambda} \rightarrow T' = 4T$$

כלומר לבחור משקולת במסה  $4m$ .  
בניסוי השני המתיחות קבועה, כלומר מהירות הגל קבועה. הפרמטר שניתן לשנות הוא אורך המיתר. אורך הגל של התדר היסודי הוא  $\lambda = 2L$ , לכן נקבל

$$f = \frac{V}{2L}$$

נדרוש לקבל תדר יסודי של  $1.5f$  ונמצא את אורך המיתר החדש  $L'$

$$1.5f = \frac{V}{2L'}$$

$$1.5 \frac{V}{2L} = \frac{V}{2L'} \rightarrow L' = \frac{2}{3}L$$

### סעיף ב

נתייחס לכל מימד של התוף בתור מיתר קשור בשני קצותיו. עבור מיתר כזה נמצא את אורכי הגל המותרים ואת התדרים המותרים  
נחש פתרון מסוג גל עומד

$$y = A \sin(kx + \varphi)$$

נציב תנאי שפה  $y(0) = y(L_x) = 0$ , ונקבל  $\varphi = 0$  ו  $kL = \pi n$ .

כלומר אורכי הגל המותרים הם

$$\lambda_n = \frac{2L_x}{n}$$

התדרים המותרים הם

$$f_n = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{V}{2L_x} n$$

במימד השני (אורך  $b$ ) נקבל באופן דומה

$$\lambda_m = \frac{2L_y}{n}$$

$$f_m = \frac{V}{\lambda_m} = \frac{V}{2L_y} m$$

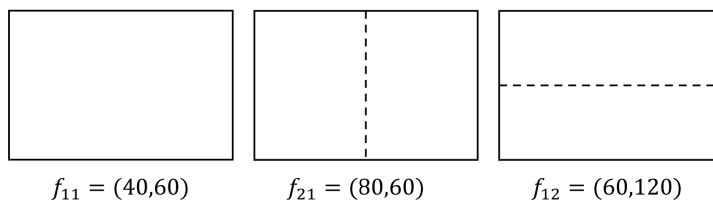
### סעיף ג

נציב את נתוני השאלה  $V = 24 \text{ m/s}$ ,  $L_y = 0.2 \text{ m}$ ,  $L_x = 0.3 \text{ m}$  ונקבל

$$f_n = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{24}{0.6} n = \frac{240}{6} n = 40 \cdot n \text{ [Hz]}$$

$$f_m = \frac{V}{\lambda_m} = \frac{24}{0.4} n = \frac{240}{4} n = 60 \cdot n \text{ [Hz]}$$

כעת נצייר את 3 אופני התנודה הראשונים, כלומר עם התדרים הנמוכים ביותר. צמד התדרים הנמוך ביותר הוא  $f_{11} = (40, 60)$ , לאחר מכן  $f_{21} = (80, 60)$ ,  $f_{12} = (40, 120)$ .



איור 1: שלושת אופני התנודה הראשונים בממברנה, הקו המקווקו מציינ קו צומת (אזור בו יש אפס תנודה)

### סעיף ד

כעת נדרוש  $f_n = f_m$  ונקבל

$$\frac{V}{2L_x} n = \frac{V}{2L_y} m$$

$$\frac{n}{m} = \frac{L_x}{L_y}$$

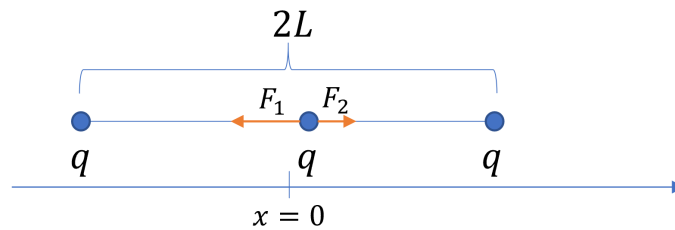
כלומר קיבלנו כי כאשר  $\frac{n}{m} = \frac{L_x}{L_y} = \frac{3}{2}$  נקבל את אותו תדר עבור שני מימדים של התוף. התדרים המקיימים משוואה זו הם

$$f = 120, 240, 360, \dots \text{ Hz}$$

כדי שלא יהיו תדרים המקיימים את המשוואה, היחס  $\frac{L_x}{L_y}$  צריך להיות לא רציונלי, שכן אז לא נוכל למצוא שני מספרים שלמים  $n, m$  המקיימים את המשוואה.

### סעיף ה

ראשית נבחר את ראשית הצירים בנקודת המרכז בין המטענים, ואת הכיוון החיובי של ציר האיקס. כעת נסתכל על הזזה קטנה של המטען ימינה.



איור 2: תרשים כוחות עבור שאלה 1 סעיף ד'

על המטען יפעלו שני כוחות, וסך הכל משוואת הכוחות שנקבל היא

$$\frac{kq^2}{(L+x)^2} - \frac{kq^2}{(L-x)^2} = m\ddot{x}$$

$$\frac{kq^2}{m} \left( \frac{1}{(L+x)^2} - \frac{1}{(L-x)^2} \right) = \ddot{x}$$

כעת עלינו לבצע קירוב מסדר ראשון בעזרת הרמז הנתון,  $\frac{1}{(L-x)^2} \approx \frac{1}{L^2} + \frac{2x}{L^3}$ ,  $\frac{1}{(L+x)^2} \approx \frac{1}{L^2} - \frac{2x}{L^3}$ , נציב את הקירוב ונקבל

$$\frac{kq^2}{m} \left( \frac{1}{L^2} - \frac{2x}{L^3} - \left( \frac{1}{L^2} + \frac{2x}{L^3} \right) \right) = \ddot{x}$$

וסך הכל קיבלנו

$$-\frac{4kq^2}{mL^3}x = \ddot{x}$$

הפתרון של המשוואה הוא

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

כאשר  $\omega^2 = \frac{4kq^2}{mL^3}$ . ידוע כי  $f = 2\pi\omega$  ולכן

$$f = 2\pi \sqrt{\frac{4kq^2}{mL^3}}$$

## 2. גלים, התאבכות, העברה והחזרה

### סעיף א

מהירות הקול באוויר היא  $340 \text{ m/s}$  הקשר בין אורך הגל לתדר הוא

$$\lambda = \frac{V}{f}$$

נמצא את אורך הגל

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{340}{3400} = 0.1 \text{ m}$$

נתייחס לרמקול בתור סדק יחיד. נקודת המינימום הראשונה נמצאת בזווית  $\theta$ , ורוחב האלומה הוא  $2\theta = 0.2$ . נמצא את נקודת המינימום הראשונה. נחלק את הסדק לזוגות של מקורות במרחק  $\frac{D}{2}$  אחד מהשני, ונדרוש התאבכות הורסת כלומר

$$\frac{D}{2} \sin(\theta) = \frac{\lambda}{2}$$

נתון כי ניתן להניח קירוב זווית קטנות כלומר  $\theta \approx \sin(\theta)$ . קיבלנו כי

$$D \approx \frac{\lambda}{\theta} = \frac{340}{0.1} = 1 \text{ m}$$

### סעיף ב

מהגרף ניתן להסיק את זמן המחזור של הפעימה וזמן המחזור של התדר הממוצע. זמן המחזור של הפעימה הוא  $T_{beat} = 0.1 \text{ sec}$ , (הזמן בין שתי נקודות אפס של מעטפת האות). כלומר תדר הפעימה הוא

$$f_{beat} = \frac{1}{T_{beat}} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ Hz}$$

את זמן המחזור של התדר הממוצע  $T_{avg}$  נמצא על ידי ספירה של מספר המחזורים הנכנסים בתוך טווח של 0.1 שניות. ספירה תיתן 10.5 מחזורים בתוך 0.1 שניות (או 21 מחזורים ב-0.2 שניות), כלומר זמן המחזור הוא

$$T_{avg} = \frac{0.1}{10.5}$$

והתדר הממוצע הוא

$$f_{avg} = \frac{1}{T_{avg}} = \frac{10.5}{0.1} = 105 \text{ Hz}$$

(יתקבלו תשובות קרובות בין 100 ל-110 הרץ, כיוון שיש אי וודאות בקביעת המספר המדויק של המחזורים בגרף בספירה פשוטה)

מתוך שני ערכים אלו נוכל לחשב את שני התדרים שיצאו מהרמקולים

$$f_{beat} = f_1 - f_2$$

$$2f_{avg} = f_1 + f_2$$

על ידי חיבור וחסור המשוואות נקבל

$$f_1 = f_{avg} + f_{beat}/2 = 110 \text{ Hz}$$

$$f_2 = f_{avg} - f_{beat}/2 = 100 \text{ Hz}$$

### סעיף ג

הניסוי המתואר מקביל לניסוי שני הסדקים. נדרוש התאבכות הורסת בין שני הרמקולים ונקבל

$$d \sin(\theta) = \lambda \left( \frac{1}{2} + n \right)$$

כעת נציב את הקשר בין אורך הגל לתדר ונסדר את המשוואה

$$\sin(\theta_n) = \frac{V}{fd} \left( \frac{1}{2} + n \right)$$

### סעיף ד

נתון כי  $L = 10m$ ,  $V = 340 m/s$ ,  $d = 1m$   
המיקום של נקודת מינימום ניתן לחישוב על ידי

$$y_n = L \tan(\theta_n) \approx L\theta_n$$

בסעיף קודם מצאנו  $\sin(\theta_n) = \frac{V}{fd} \left( \frac{1}{2} + n \right)$  כעת נבצע קירוב זווית קטנות ונקבל

$$\theta_n = \frac{V}{fd} \left( \frac{1}{2} + n \right)$$

המרחק בין שתי נקודות המינימום הראשונות הוא

$$y_1 - y_0 = L(\theta_1 - \theta_0) = L \left( \frac{V}{fd} \right)$$

נציב את הנתונים ונקבל

$$1 = 10 \left( \frac{340}{f \cdot 1} \right) \rightarrow f = 3400 \text{ Hz}$$

## סעיף ה

מקדם ההחזרה נתון לפי

$$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

במקרה שלנו נתון כי  $z_2 = 100\text{kg/s}$ ,  $z_1 = 0.1\text{kg/s}$  כלומר קיבלנו

$$r = \frac{0.1 - 100}{0.1 + 100} = -\frac{99.9}{100.1} \approx -0.999$$

כעת נתון כי  $z_2 = 0.3\text{kg/s}$ ,  $z_1 = 0.1\text{kg/s}$  כלומר קיבלנו

$$r = \frac{0.1 - 0.3}{0.1 + 0.3} = -\frac{0.2}{0.4} = -\frac{1}{2}$$

נניח אמפליטודה התחלתית  $A$  בכל החזרה האמפליטודה מוכפלת במקדם ההחזרה  $r$ . לאחר  $N$  החזרות האמפליטודה שנקבל היא

$$r^N A = \left(-\frac{1}{2}\right)^N A$$

במקרה זה כאשר  $N = 4$  נקבל אמפליטודה

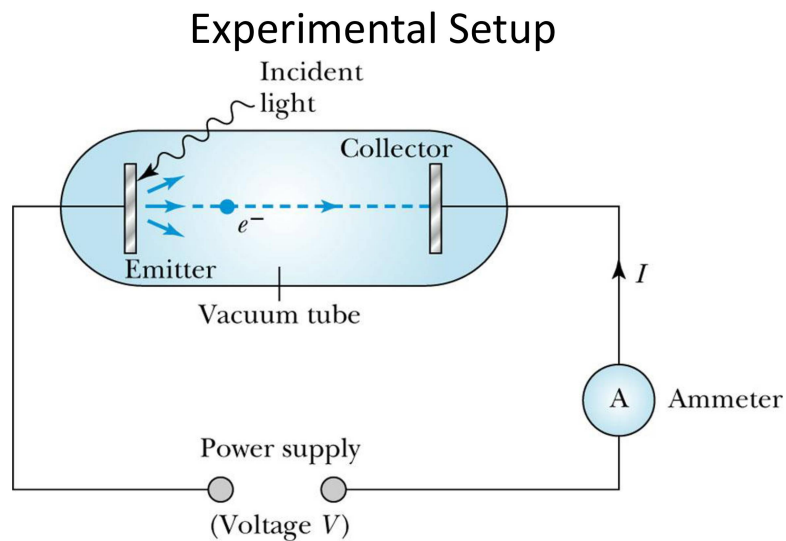
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 A = \frac{1}{16} A$$

כלומר לאחר 4 החזרות גודל האמפליטודה ידעך לפחות מ-10% מערכו ההתחלתי. האנרגיה פרופורציונית לאמפליטודה בריבוע ולכן לאחר 4 החזרות נקבל  $\left(\frac{1}{16}\right)^2$  מהאנרגיה ההתחלתית.

### 3. האפקט הפוטו-אלקטרי, פוטנציאל מדרגה

סעיף א

בניסויי הפוטואלקטרי מחברים שפורפרת ואקום בתוכה שני אלקטרודות למקור מתח. מאירים על אחת האלקטרודות באור בתדר  $f$  ומודדים את הזרם כפונקצייה של המתח. ממדידות אלו מחשבים שני גדלים, את מתח העצירה (המתח עבורו נעצר הזרם), שתלוי רק בתדר האור ואת זרם הרוויה (הזרם המקסימאלי האפשרי) שתלוי בעוצמת האור. כאשר נפיק גרף של זרם כפונקציה של מתח נוכל לצפות בשני גבולות, עבור מתח שלילי גדול מספיק, הזרם יתאפס. זהו מתח העצירה. כאשר נגדיל את המתח לערך חיובי גדול, נראה כי הזרם מתייצב על ערך קבוע, זרם הרוויה.

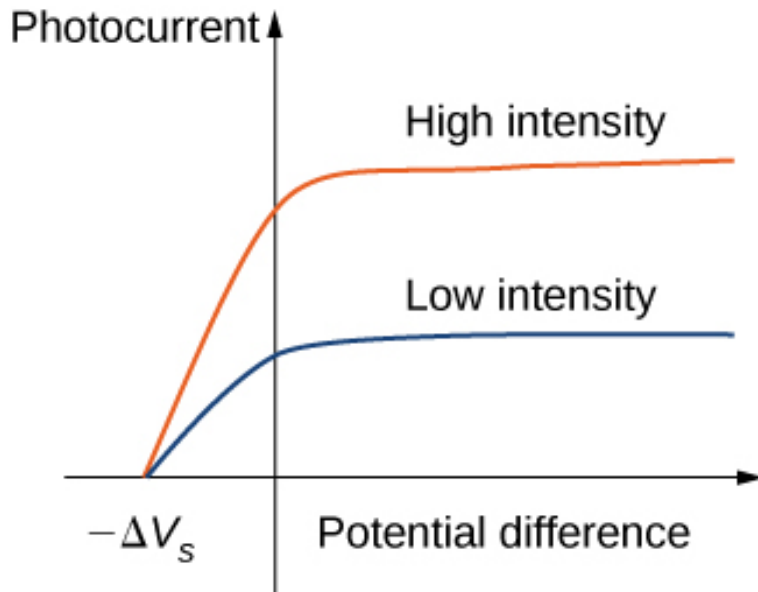


© 2006 Brooks/Cole - Thomson

3

איור 3: מערכת הניסויי לבדיקת האפקט הפוטואלקטרי





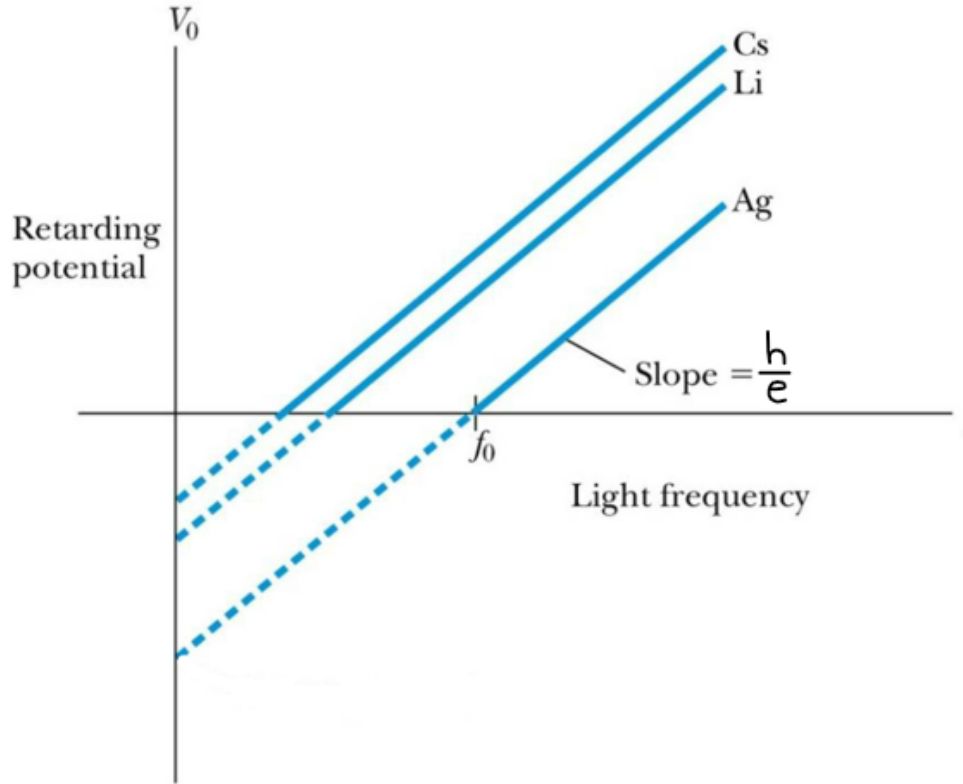
איור 4: זרם כפונקצייה של מתח בניסויי האפקט הפוטואלקטרי עבור שתי עוצמות הארה שונות באותו התדר

### סעיף ב

את מתח העצירה ניתן לחשב באופן הבא: האנרגיה הקינטית של אלקטרון שווה לאנרגיה שהוא מקבל מהפוטון פחות האנרגיה שנדרשה להוצאתו מהמתכת, שהיא פונקציית העבודה של המתכת,  $E_k = hf - \phi$ . בכדי שהאלקטרון ייעצר לפני שיגיע לאלקטרודה השנייה יש להפעיל מתח שיגרום לאלקטרון לאבד את כל האנרגיה הקינטית. שינויי האנרגיה של אלקטרון הנע במתח  $V$  הוא  $eV$  ולכן מתח העצירה מקיים:

$$eV_0 = hf - \phi \quad (1)$$

זוהי נוסחת איינשטיין. מנוסחה זו נובע כי השיפוע בגרף של מתח העצירה כפונקצייה של התדר הינו  $\frac{h}{e}$  ונקודת החיתוך עם ציר ה-x היא  $f_0 = \frac{\phi}{h}$ , זוהי תדירות הסף, התדירות המינמלית הדרושה כדי לשחרר אלקטרון מהמתכת.



איור 5: מתח עצירה כפונקציה של תדר במתכות שונות

כאשר נשנה את עוצמת האור, הגרף של מתח העצירה לא ישתנה, שכן מתח העצירה לא תלוי בעוצמת האור כפי שניתן לראות מהמשוואה. כאשר נשנה את המתכת של הקתודה שיפוע הגרף יישאר זהה, אך נקודת החיתוך עם ציר  $x$  (תדירות הסף) תשתנה בהתאם לשינוי בפונקציית העבודה.

### סעיף ג

- תדירות סף: לפי תיאוריה קלאסית ניתן לייצר פליטת אלקטרונים בכל תדר, אך דרושה עוצמה מספיקה של האור. בניסוי לעומת זאת ישנה תדירות סף, אשר מתחתיה לא ייפלטו אלקטרונים כלל. בהסבר חלקיקי לכל פוטון יש אנרגיה הפרופוזיונית לתדר האור, ורק אם האנרגיה של פוטון בודד גבוהה מספיק הוא יכול לשחרר אלקטרון מהמתכת.
- הזרם מתחיל ללא עיכוב: לפי תיאוריה קלאסית יידרש זמן ראשוני מסויים בשביל שהגל יעביר מספיק אנרגיה לשחרור אלקטרונים מהחומר. בפועל אין עיכוב שניתן למדוד והזרם מתחיל מיד עם הפעלת מקור האור.
- מתח העצירה לא תלוי בעוצמת האור: לפי תיאוריה קלאסית גלית, האנרגיה המקסימלית שאלקטרון יכול לקבל בעת שחרור מהמתכת תהיה תלויה בעוצמת האור. בפועל מתח העצירה תלוי בתדר האור בלבד.

נפתח את הנוסחא לתנע הפוטון מתוך נוסחאת דה־ברולי  $\lambda = \frac{h}{p}$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$$

### סעיף ד

בכדי למצוא את פונקציית הגל יש לפתור את משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן בכל איזור. נבחר מערכת צירים כך ש  $x = 0$  בצד שמאל של המחסום ו  $x = L$  בצידו הימני. משוואת שרדינגר עבור  $x < 0$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_1(x)}{\partial x^2} = E\psi_1(x) \Rightarrow k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2)$$

באיזור זה יש את הגל ההתחלתי שנע ימינה והגל החוזר שנע שמאלה, לכן הפתרון למשוואה:

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (3)$$

משוואת שרדינגר עבור  $0 < x < L$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_2(x)}{\partial x^2} + V_0\psi_2(x) = E\psi_2(x) \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (4)$$

ופתרונה הכללי:

$$\psi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} \quad (5)$$

משוואת שרדינגר עבור  $L < x$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_3(x)}{\partial x^2} = E\psi_3(x) \Rightarrow k_3 = k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (6)$$

באיזור זה יש רק גל שנע ימינה, לכן הפתרון:

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} \quad (7)$$

כדי למצוא את המקדמים השונים נדרוש קיום רציפות פונקציית הגל ונגזרתה במעבר בין האיזורים השונים. מרציפות ב  $x = 0$ :

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow A + B = C + D \quad (8)$$

מרציפות ב  $x = L$ :

$$\psi_2(x=L) = \psi_3(x=L) \Rightarrow Ce^{\alpha L} + De^{-\alpha L} = Fe^{ik_1L} \quad (9)$$

מרציפות נגזרת ב  $x = 0$ :

$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0) \Rightarrow ik_1A - ik_1B = \alpha C - \alpha D \quad (10)$$

מרציפות נגזרת ב  $x = L$ :

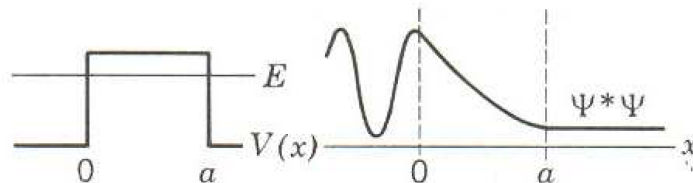
$$\psi_2'(x=L) = \psi_3'(x=L) \Rightarrow \alpha Ce^{\alpha L} - \alpha De^{-\alpha L} = ik_1Fe^{ik_1L} \quad (11)$$

בהנחה שהאמפליטודה ההתחלתית  $A$  ידועה משוואות (39) – (36) מאפשרות למצוא את 4 המשתנים הנותרים  $B, C, D, F$ . את מקדם ההעברה נמצא לפי

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \frac{k_f}{k_i} = \left| \frac{F}{A} \right|^2$$

## סעיף ה

משמאל למחסום יש התאבכות בין הגל המגיע והגל החוזר שיוצרת איזורים עם צפיפות הסתברות נמוכה (אך לא אפס, שכן חלק מהגל עובר את המחסום) ואיזורים עם צפיפות הסתברות גבוהה. בתוך המחסום האקספוננט הדועך יותר משמעותי ולכן צפיפות הסתברות דועכת אקספוננציאלית. בצד ימין של המחסום אין התאבכות ולכן צפיפות הסתברות קבועה.



איור 6: הפוטנציאל הנתון, וצפיפות הסתברות

ידוע (בדף הנוסחאות) כי הסיכוי לעבור את המחסום הוא  $T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \propto e^{-2k_2L}$ . נתון כי סיכוי זה הוא  $P_1$ . כעת מגדילים את רוחב המחסום ל  $2L$  כלומר

$$P_2 \propto e^{-2k_2 \cdot 2L} = (e^{-2k_2L})^2 \rightarrow P_2 = P_1^2 = 0.2^2 = 0.04$$

#### 4. בור פוטנציאל אינסופי

סעיף א

נתון בור פוטנציאל סופי לפי הפוטנציאל הבא

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < 0 \\ 0 & 0 < x < d \\ V_0 & d < x \end{cases}$$

חלקיק במסה עם  $m$  עם אנרגיה  $E > V_0$  מגיע לעבר הבור משמאל. משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן היא

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x)$$

כאשר בתוך הבור נקבל

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

ומחוץ לבור נקבל

$$(E - V_0)\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

פונקציית הגל משמאל לבור  $x < 0$  נתונה לפי (גל נע ימינה, וגל נע שמאלה)

$$\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

פונקציית הגל מימין לבור  $x < d$  נתונה לפי (גל נע ימינה בלבד)

$$\psi(x) = Fe^{ik_1x}$$

כאשר מספר גל ניתן לחישוב ממשוואת שרדינגר הוא

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

בתוך הבור  $0 < x < d$  פונקציית הגל היא

$$\psi(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

כאשר מספר גל ניתן לחישוב ממשוואת שרדינגר הוא

$$k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

## סעיף ב

תנאי השפה הם רציפות פונקציית הגל ונגזרתה ב  $x = 0, d$   
נציב את פונקציית הגל בתנאי השפה ונקבל

$$\psi(0^-) = \psi(0^+) \rightarrow A + B = C + D$$

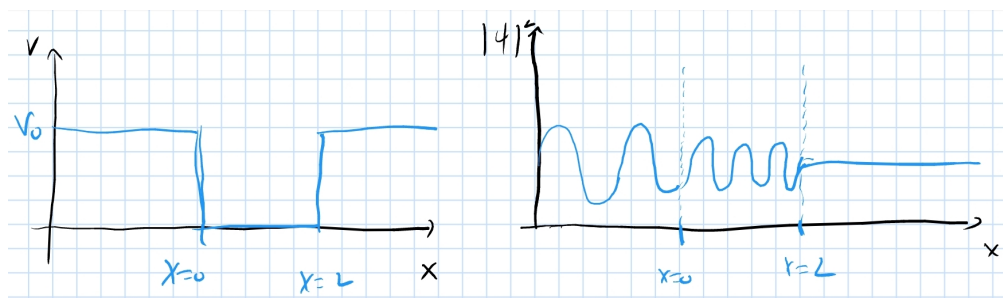
$$\psi'(0^-) = \psi'(0^+) \rightarrow ik_1(A - B) = ik_2(C - D)$$

$$\psi(d^-) = \psi(d^+) \rightarrow Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d} = Fe^{ik_1d}$$

$$\psi'(d^-) = \psi'(d^+) \rightarrow ik_2(Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}) = ik_1(Fe^{ik_1d})$$

קיבלנו 4 משוואות עם 5 נעלמים, מהם ניתן למצוא יחס בין כל זוג נעלמים.

כדי לחשב את ההסתברות שהחלקיק יחזור נמצא את היחס  $\left|\frac{B}{A}\right|^2$   
כדי לחשב את ההסתברות שהחלקיק יעבור נמצא את היחס  $\left|\frac{F}{A}\right|^2$   
להלן ציור של הערך המוחלט של פונקציית הגל:



איור 7: הפוטנציאל הנתון וצפיפות ההסתברות

משמאל לבור יש התאבכות בין הגל המגיע והגל החוזר שיוצרת איזורים עם צפיפות הסתברות נמוכה (אך לא אפס, שכן חלק מהגל עובר את המחוסם) ואיזורים עם צפיפות הסתברות גבוהה. בתוך הבור בצורה דומה נקבל גל עומד, אבל עם אורך גל קצר יותר, שכן מספר הגל גדול יותר. בצד ימין של הבור יש רק גל הנע ימינה אין התאבכות ולכן צפיפות ההסתברות קבועה.

## סעיף ג

כאשר משנים את הפוטנציאל כך ש  $V_0 \rightarrow \infty$  אנחנו מקבלים בעצם בור אינסופי ברוחב  $d$ . כלומר יש לנו חלקיק בעל מסה  $m$  נמצא בבור פוטנציאל אינסופי מרובע ברוחב  $d$  כאשר הקיר השמאלי של הבור נמצא בנקודה  $x = 0$  ניתן להשתמש במשוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן, כיוון שהפוטנציאל לא תלוי בזמן. כלומר נקבל את המשוואה

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x)$$

בתחום שבתוך הבור  $V = 0$  נקבל

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

מחוץ לבור  $V = \infty$  גורר שפונקציית הגל מתאפסת  $\psi(x) = 0$  בתחום  $x < 0$  ועבור  $x > d$  התנאים על פונקציית הגל היא רציפות, כלומר  $\psi(0) = 0, \psi(d) = 0$  הפתרון הכללי למשוואה שקיבלנו בתוך הבור הוא

$$\psi(x) = A \sin(kx + \varphi)$$

בהצבה של תנאי השפה נקבל

$$\varphi = 0, k_n = \frac{\pi}{d} n$$

כעת נמצא את מקדם הנרמול

$$\int_0^d P(x) dx = 1$$

$$\int_0^d A_n^2 \sin^2(k_n x) dx = 1$$

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{d}}$$

הפתרון הכללי כולל הנרמול ותלות בזמן הוא-

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cdot e^{-i\omega_n t}$$

כאשר

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$$

## סעיף ד

האנרגיה של החלקיק נתונה לפי

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m d^2} n^2$$

החלקיק יכול לבלוע פוטון עם אנרגיה שמתאימה למעבר בין שתי רמות, כאשר האנרגיה של רמה נתונה לפי  $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m d^2} n^2$  ולכן החוקר צריך לשלוח פוטון בתדר

$$f = \frac{1}{h} (E_3 - E_1) = \frac{1}{h} (3^2 - 1^2) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m d^2} = \frac{1}{h} 8 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m d^2}$$

על מנת להוציא את החלקיק מהבור, יש לתת לו אנרגיה המספיקה כדי להגיע לרמה  $n = \infty$ , במקרה של בור אינסופי נצטרך אינסוף אנרגיה

$$f = \frac{1}{h}(E_{\infty} - E_1) = \frac{1}{h}(\infty^2 - 1^2) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2} = \infty$$

ולכן לא ניתן להוציא את החלקיק מן הבור.



## 5. מבנה האטום

נראה כי  $\psi(r, t)$  מנורמלת:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \langle \psi_{1,0,0,1/2} | e^{iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2 \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | e^{iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} \left( | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2 | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( \langle \psi_{1,0,0,1/2} | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle + 4 \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle + \right. \\ &\quad \left. \langle \psi_{1,0,0,1/2} | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{iE_1 \frac{t}{\hbar}} e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}} + \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{t}{\hbar}} e^{iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) = \\ &= \frac{1}{5} (1 + 4) = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

ההסתברות שהאלקטרון נמצא ברמת היסוד היא ההסתברות שהוא נמצא במצבים  $|\psi_{1,0,0,\pm 1/2}\rangle$ . ההסתברות שהאלקטרון במצב  $|\psi_{1,0,0,1/2}\rangle$  היא:

$$|\langle \psi_{1,0,0,1/2} | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \langle \psi_{1,0,0,1/2} | e^{iE_1 \frac{t}{\hbar}} \right|^2 = \frac{1}{5} \quad (13)$$

ההסתברות שהאלקטרון נמצא במצב  $|\psi_{1,0,0,-1/2}\rangle$  היא

$$|\langle \psi_{1,0,0,-1/2} | \psi \rangle|^2 = 0 \quad (14)$$

לכן ההסתברות שהאלקטרון נמצא במצב היסוד (מצב עם אנרגיה  $E_1$ ) היא  $\frac{1}{5}$ .

### סעיף ב

(I) הערך הממוצע של האנרגיה:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= \langle \psi | \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \hat{H} | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2 \hat{H} | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \langle \psi_{1,0,0,1/2} | e^{iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2 \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | e^{iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} \left( E_1 | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2E_2 | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) = \\ &= \frac{1}{5} (E_1 + 4E_2) = \frac{1}{5} \left( -13.6eV + 4 \cdot \frac{-13.6eV}{4} \right) = \frac{-27.2eV}{5} = -5.44eV \end{aligned} \quad (15)$$

(II) הערך הממוצע של התנע הזוויתי בציר  $z$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{L}_z | \psi \rangle &= \langle \psi | \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \hat{L}_z | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2 \hat{L}_z | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \langle \psi_{1,0,0,1/2} | e^{iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2 \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | e^{iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} \left( 0 \cdot | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{t}{\hbar}} + 2(-\hbar) | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}} \right) = \end{aligned}$$

$$\langle \hat{L}_z \rangle = -\frac{4}{5} \hbar \quad (16)$$

(III) הערך הממוצע של הספין בכיוון z:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle &= \langle \psi | \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{S}_z | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{\hbar}{\hbar}} + 2 \hat{S}_z | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{\hbar}{\hbar}}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\langle \psi_{1,0,0,1/2} | e^{iE_1 \frac{\hbar}{\hbar}} + 2 \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | e^{iE_2 \frac{\hbar}{\hbar}}) \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\hbar}{2} | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{\hbar}{\hbar}} + 2 \frac{\hbar}{2} | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{\hbar}{\hbar}} \right) = \\ \langle S_z \rangle &= \frac{1}{5} \left( \frac{\hbar}{2} + 4 \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

(IV) בכדי לחשב את אי הוודאות נחשב קודם את הערך הממוצע של  $\hat{L}_z^2$   
הערך הממוצע של  $\hat{L}_z^2$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{L}_z^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{L}_z^2 | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{\hbar}{\hbar}} + 2 \hat{L}_z^2 | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{\hbar}{\hbar}}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\langle \psi_{1,0,0,1/2} | e^{iE_1 \frac{\hbar}{\hbar}} + 2 \langle \psi_{2,1,-1,1/2} | e^{iE_2 \frac{\hbar}{\hbar}}) \frac{1}{\sqrt{5}} (0^2 \cdot | \psi_{1,0,0,1/2} \rangle e^{-iE_1 \frac{\hbar}{\hbar}} + 2(-\hbar)^2 | \psi_{2,1,-1,1/2} \rangle e^{-iE_2 \frac{\hbar}{\hbar}}) = \frac{1}{5} (1 \cdot 0 \hbar^2 + 4 \cdot \hbar^2) \\ \langle \hat{L}_z^2 \rangle &= \frac{4}{5} \hbar^2 \end{aligned} \quad (18)$$

לכן, אי הוודאות ב  $\hat{L}_z$  היא:

$$\Delta \hat{L}_z = \sqrt{\langle \hat{L}_z^2 \rangle - \langle \hat{L}_z \rangle^2} = \sqrt{\frac{4}{5} \hbar^2 - \left(-\frac{4}{5} \hbar\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25} - \frac{16}{25}} \hbar = \frac{2\hbar}{5}$$

### סעיף ג

הפיצול נובע מאינטראקציה בין הספין של האלקטרון לתנע הזוויתי שלו. אינטראקציה זו נקראת "ספין-מסילה" והיא מהצורה  $U_{S.O.} \propto \hat{S} \cdot \hat{L}$ . השדה המגנטי שאלקטרון מרגיש גורם לשינוי באנרגיה בשל הספין של האלקטרון. עבור שדה מגנטי בעוצמה  $B$  האנרגיה של האלקטרון תשתנה ב  $2\mu_B m_s B$  כאשר  $m_s = \pm 1/2$  הוא המספר הקוונטי המתאים לספין האלקטרון בכיוון z. הפיצול שיווצר בין אלקטרון עם ספין up לאלקטרון עם ספין down הוא:

$$\Delta E = 2\mu_B \frac{1}{2} B - 2\mu_B \left(-\frac{1}{2}\right) B = 2\mu_B B \quad (19)$$

נשווה לפיצול שנתון לנו ונמצא את השדה האפקטיבי B:

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{4.5 \cdot 10^{-5} eV}{2 \cdot 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}} = \frac{4.5 \cdot 10^{-5} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J}{2 \cdot 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}} = \frac{4.5 \cdot 1.6}{2 \cdot 9.274} T \approx 0.4T \quad (20)$$

### סעיף ד

כל מצב קוונטי אפשרי מיוצג על ידי 4 מספרים קוונטים. לפי עקרון האיסור של פאולי בכל מצב קוונטי ניתן לאכלס רק אלקטרון אחד. לפי הכללים למספרים הקוונטים,  $-l \leq m_l \leq l$ ,  $0 \leq l < n$ , וכמו כן המספר הקוונטי של הספין  $m_s$  מקבל את הערכים  $m_s = \pm \frac{1}{2}$

כדי לאכלס 18 אלקטרונים, נצטרך 18 מצבים, המצבים להלן

$n$	$l$	$m_l$	#of $m_l$	$m_s$	#of states
1	0	0	1	$\pm \frac{1}{2}$	2
2	0	0	1	$\pm \frac{1}{2}$	8
	1	1, 0, -1	3	$\pm \frac{1}{2}$	
3	0	0	1	$\pm \frac{1}{2}$	8
	1	1, 0, -1	3	$\pm \frac{1}{2}$	

### סעיף ה

בכדי להראות שהמצב הנתון הוא minimal uncertainty wave packet יש לחשב את את אי הוודאות ב  $x$  וב  $p$  ולהראות שמכפלתן נותנת  $\frac{\hbar}{2}$ . לצורך כך נחשב את הממוצעים של  $x, p, x^2, p^2$ .

$$\langle x \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0 \quad (21)$$

זה אינטגרל על פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי ולכן הוא מתאפס.

$$\langle p \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx =$$

$$-\frac{i\hbar}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right] \left(-\frac{x}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right]\right) dx = \frac{i\hbar}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0 \quad (22)$$

שוב האינטגרל מתאפס כי זהו אינטגרל על פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי.

$$\langle x^2 \rangle = \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x^2 \psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2 \quad (23)$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi(x) dx =$$

$$-\frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right] \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right]\right) dx =$$

$$-\frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right] \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right] + \frac{x^2}{4\sigma^4} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right]\right) dx =$$

$$\frac{\hbar^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]\right) dx = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} \quad (24)$$

אי הוודאות ב  $x$ :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma \quad (25)$$

אי הוודאות ב  $p$ :

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4\sigma^2}} = \frac{\hbar}{2\sigma} \quad (26)$$

ואכן  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ . **הערה:** פתרון לשאלה זו נחשב מלא גם ללא פתרון האינטגרלים. מספיק להציג את האינטגרלים ל  $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$  ולרשום ש  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  ו  $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$  וש  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$  minimal uncertainty wave packet אומר ש  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ .