זהויות טריגונומטריות

השתמש בזהויות

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

בכדי להוכיח את הזהות הטריגונומטרית הבאה:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c\cos\left(\theta + \phi\right)$$

כאשר a, b, c, ϕ קבועים ממשיים.
בטא את c, ϕ בעזרת a, b.

פתרון

ראשית ע"י הכפלת מונה ומכנה בi בזהות עבור $\sin\theta$ נקבל: $\sin\theta = \frac{ie^{-i\theta} - ie^{i\theta}}{2}$, כעת:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \frac{\left(a - ib\right)e^{i\theta} + \left(a + ib\right)e^{-i\theta}}{2}$$

נשתמש בהצגה הפולארית של המספרים $a + ib, a - ib$:

$$a \pm ib = ce^{\pm i\tilde{\phi}} \quad , c = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \tilde{\phi} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & a > 0 \\ -\arctan\frac{b}{a} & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0, b \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c\frac{e^{-i\tilde{\phi}}e^{i\theta} + e^{i\tilde{\phi}}e^{-i\theta}}{2} = c\frac{e^{i\left(\theta - \tilde{\phi}\right)} + e^{-i\left(\theta - \tilde{\phi}\right)}}{2} = c\cos\left(\theta - \tilde{\phi}\right)$$

קיבלנו את הזהות המבוקשת עם:

$$\phi = -\tilde{\phi} = \begin{cases} -\arctan\frac{b}{a} & a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} & a < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0, b \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \end{cases} \quad , \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$