נתון חלקיק שמסתו m הנמצא בבור פוטנציאל אינסופי באורך L .

א) מצא/י פונקציות עצמיות וערכים עצמיים של אנרגיית החלקיק.

ב. הראה שהמצבים העצמיים של החלקיק מהווים בסיס אורטוגונלי. נרמל/י את המצבים.

ג) צייר/י את שלושת המצבים בעלי האנרגיה הנמוכה ביותר בעזרת תוכנה לשרטוט גרפי (Mathematica, Matlab, Origin... וכו'), השתמשי ב x/L עבור ציר הX. יש לצייר רק את החלק המרחבי של הפונקציה.

ד) כתוב/כתבי ביטוי כללי למצב החלקיק בזמן כלשהו $\psi(x,t)$.

ה) מצא/י את ערכי התוחלת של x עבור מצב עצמי מסוים.

משוו — שרדינגר

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + U(x,t)\cdot\psi(x,t)$$

$\psi(x,t)$ היא פונקצי — הי.

$$\boxed{\psi(x,t)=\varphi(x)\cdot T(t)}$$

$$T(t)=e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=\varphi(x)\cdot e^{-i\omega t}$$

$$i\hbar\cdot\varphi(x)\cdot(-i\omega)\cdot e^{-i\omega t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)\cdot e^{-i\omega t} + U(x)\cdot\varphi(x)\cdot e^{-i\omega t}$$

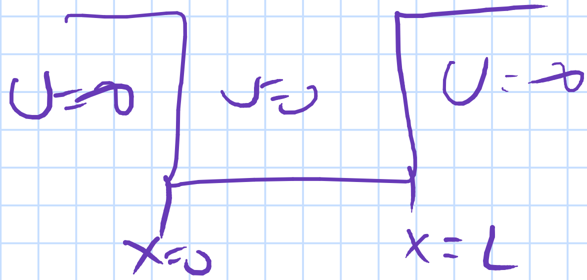
$$\underline{\hbar\omega}\cdot\varphi(x)\cdot\cancel{e^{-i\omega t}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)\cdot\cancel{e^{-i\omega t}} + U(x)\cdot\varphi(x)\cdot\cancel{e^{-i\omega t}}$$

$$\boxed{E\cdot\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)+U(x)\cdot\varphi(x)}$$

קיבלנו — את משוו — שרדינגר הבלתי תלויה בזמן.

$$\underbrace{E\cdot\varphi(x)} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + U(x)\cdot\varphi(x)}$$

$$A\underline{\vec{v}} = \underline{\underline{\lambda}}\,\vec{v}$$



בתוך [illegible] $\leftarrow U(x)=0$

$$E\cdot\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) = -\frac{E\cdot 2m}{\hbar^2}\cdot\varphi(x)} \leftarrow U=0$$

$$\varphi_n(x) = A_n\sin(\underline{k_n}x+\varphi) \leftarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) = -k^2\cdot\varphi(x)}$$

$$k^2 = \frac{2m\cdot E}{\hbar^2} \qquad \boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}}$$

$$\varphi_n = A_n\sin(k_n x+\varphi)$$

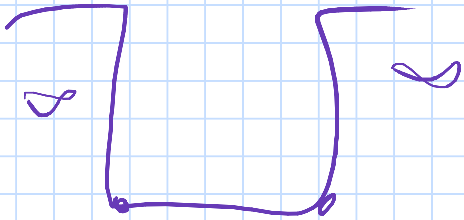
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$$

$\phi_n = A_n \sin(k_n x + \phi) \leftarrow$ פתרון אז

של גל עומד

$$\phi(x=0, L) = 0$$

תנאי שפה



$$\phi_n(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$A_n \sin(0 + \phi) = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$\phi(x = L) = 0$$

$0, \pi, 2\pi$

$$A_n \sin(k_n \cdot L) = 0$$

$$k_n \cdot L = \pi n \qquad n = 1, 2 \ldots$$

$$k_n = \frac{\pi n}{L}$$

$$\boxed{\phi_n = A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} \cdot x\right)}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2}{2m}$$

ב) הראה: שהמצבים העצמיים מנורמלים

פתרון: אורתונורמליות:

(רמז) ב___ המצבי___

(רמז') (רמז')

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cdot \varphi^{*} \, dx = 1$$

$0 < x \quad \varphi = 0$

$L < x \quad \varphi(x) = 0$

$$\varphi_n = \underline{A_n} \cdot \sin(k_n x)$$

$$\int_0^L A_n \sin(k_n x) \cdot A_n^{*} \sin(k_n x) = 1$$

$$|A_n|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L} \cdot x\right) = 1$$

$$|A_n|^2 \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L} \cdot x\right)\right) = 1$$

$$|A_n|^2 \cdot \frac{1}{2} L - \int_0^L \frac{1}{2} \cancel{\cos \frac{2\pi n}{L} (x)} \to 0 \qquad A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$(\sqrt{\ })$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin(k_n x)$$

$$\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \cdot \varphi_n^* = 1$$

$$\int_0^L \varphi_n \cdot \varphi_n^* = 1$$

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \cdot \varphi_m^* = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin(k_n x) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin(k_m x) =$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin(k_n x) \cdot \sin(k_m x) =$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\cos((k_n - k_m) x) - \cos((k_n + k_m) x) \right) dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{\pi n}{L} - \frac{\pi m}{L}\cdot x\right) - \cos\left(\frac{\pi(n+m)}{L}\cdot x\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{L}\,C\left[\sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot x(n-m)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot x(n+m)\right)\right]_0^L$$

$$\pi(n-m) \qquad \sin(\pi(n+m))$$

$$\frac{2}{L}\cdot C\left[(0-0) - (0-0)\right]$$

$$\int_0^L \sin(k_n x)\cdot\sin(k_m x)\,dx = 0$$

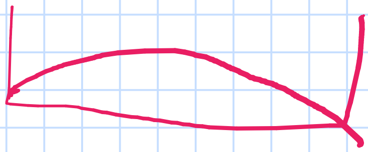
$$k_n = \frac{\pi n}{L} \qquad n \neq m$$

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = 1$$

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n \cdot x)$$

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0 \quad n \neq m$$

קיבלנו בסיס אורתונורמלי.

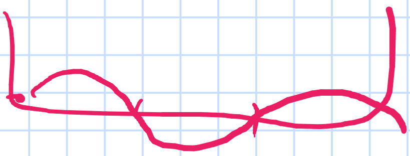


ψ_1

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{2} x\right)$$

ψ_2

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$$



ψ_3

$n=1$

$n=2$

$n=3$

$$\Psi(x,t) = \phi(x) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\hbar \omega_n = E_n$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}}$$

ערכי — ערך התוחלת של x

עבור $\phi_n(x)$ עצמיים

$$\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi\cdot x\,\psi^{*} = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot|\psi(x)|^2$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x\cdot\sin^2(k_n x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{2}x\left[1-\cos 2k_n x\right]dx$$

$$= \frac{2}{L}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^L x\,dx - \int_0^L x\cos 2k_n x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^L - \cancel{\int_0^L x\cdot\cos(2k_n x)\,dx}\right] =$$

0

אינטגרל על פונקצי'

זוגי' — במחזור

$$\frac{1}{L}\cdot\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\langle x\rangle = \frac{L}{2}$$

אפשר להבין את — התוחלת שיוצא:

פונקציה, בגלל ש $|\psi(x)|^2$ סימטרי —

יוצא — במרכז הבור

$$f(x) = \sum a_n \cdot f_n(x) \leftarrow$$

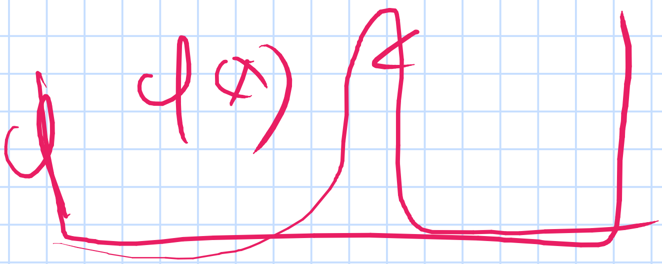
ניתן לפרק
כל מצב קוונטי
כסכום של מצבי
הבסיס שמצאנו
לקודם!

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2(x) =$$

$$\langle f(x) | f(x) \rangle = \frac{1}{2}\langle f_1 | f_1 \rangle + \frac{1}{2}\langle f_2 | f_2 \rangle +$$

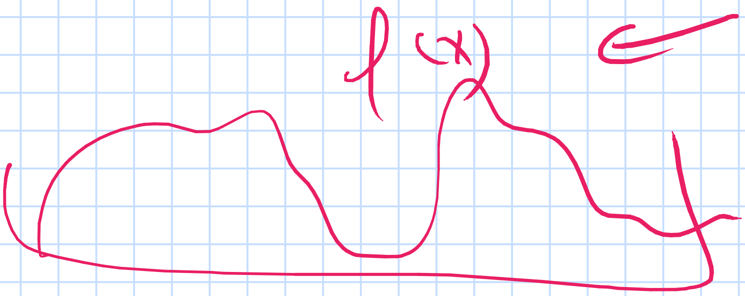
$$\frac{1}{2}\underbrace{\langle f_1 | f_2 \rangle}_{\to 0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle f_2 | f_1 \rangle}_{\to 0}$$

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = 0$$



$$f(x) = \sum a_n f(x)$$

$$f(x) = \sum a_n f(x)$$



$$E \cdot f(x) = H f(x)$$

$$E \cdot f(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x)$$

$\psi_n(x)$ ⟵ מצב עצמי

⟵ פונקציה עצמית

E_n ⟵ ע״ע

⟵ אנרגיה

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)$$

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$