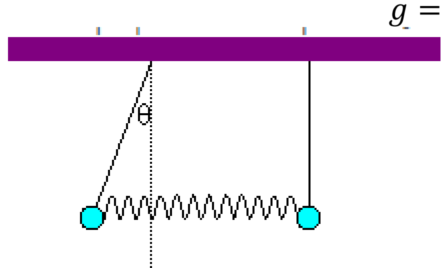
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

תאריך הבחינה: 4 בספטמבר 2020
שמות המרצים: פרופ' רון פולמן
מבחן בקורס: פיסיקה 3 להנדסת חומרים
מס' קורס: 203-1-2421
שנה: 2020, סמסטר ב', מועד ב'
משך הבחינה: 3.5 שעות (ללא אפשרות להארכה)
חומר עזר: דף נוסחות אחיד, מצורף למבחן
אין להשתמש במחשבון או כל חומר עזר אחר!

בבחינה חמש שאלות. יש לענות על ארבע (כל אחת בת 25 נק'). במידה ותענה על חמש שאלות, יבדקו באופן אוטומטי רק הארבע הראשונות. על כן, אם ברצונך ששאלה מסוימת לא תיבדק, נא לוודא שהיא מחוקה בצורה ברורה (למשל X על כל הדף).

1. תנודות וגלים (25 נק'):

במערכת הבאה תלויים צמד חוטים באורך 0.1 מטר ובקצותיהם שני כדורים בעלי מסה של 100 גרם. שני הכדורים מחוברים בניהם על ידי קפיץ בעל קבוע קפיץ k=25 N/m. בזמן t=0 הכדור השמאלי מוסט בזווית של 0.1 rad.
לצורך חישובים הנח כי $g = 10m/s^2$



א. (10 נק') רשום/י את משוואות התנועה, מצא את התדירויות העצמיות והמצבים העצמיים של המערכת. האם ניתן להניח תנודות קטנות בבעיה זו?
ב. (5 נק') איזו תנועה מתארת כל תדירות עצמית?
ג. (5 נק') מצא את תדירות הפעימות של המערכת, האם ניתן יהיה להבחין בפעימות בבעיה זו? בחר מסה חדשה לכדורים שבה ניתן יהיה להבחין בפעימות.
ד. (5 נק') נתון חליל באורך 1 מטר, (חליל הוא צינור הפתוח שני קצותיו, ומלא אויר) מה התדרים של הצלילים הניתן להפיק בחליל כזה? כעת חוסמים קצה אחד של החליל, מה התדרים של הצלילים שניתן להפיק במצב זה? נתון כי מהירות הקול באויר היא 340 מטר לשניה.

2. התאבכות (25 נק'):

א. (5 נק') פתחו את הנוסחה לתבנית ההתאבכות בניסוי שני הסדקים (בצעו ממוצע על הזמן). אין צורך לבצע את כל האינטגרל. (האינטגרל מ-0 ל-T על $cos^2(\omega t + \phi)$ עם נרמול של $1/_T$ שווה לחצי).
ב. (10 נק') כאשר מאירים שני סדקים (אורך גל 864.5 ננומטר באויר), המרחק בין נקודות האור על המסך הוא 0.8 מ"מ (מרחק הסדקים מהמסך הוא 80 ס"מ). אם כל הניסוי מבוצע במים (n=1.33), מהו המרחק בין הסדקים? במהלך הניסוי נכנסת בועת אוויר (n=1) שעובייה t לסדק השמאלי. מה משתנה בתמונת ההתאבכות? יש לתת ביטוי תוך שימוש בפרמטרים הנתונים בלבד. מה ערכו של t כדי שדבר בתמונת ההתאבכות לא ישתנה ביחס לתמונה שהתקבלה קודם לכן?
ג. (5 נק') במעבר בסדק בודד, רוב העוצמה נשלחת למקסימום (שיא) המרכזי של תבנית הדיפרקציה. הניחו שכל העוצמה הולכת אל המקסימום המרכזי, חישבו מה צריך להיות רוחב הסדקים בניסוי שני הסדקים, כדי שנראה בצורה חדה לפחות שבעה שיאים מתבנית ההתאבכות של שני הסדקים.

ד. (5 נק') (לא קשור בסעיפים הקודמים) בניסוי שני הסדקים (המרחק בין הסדקים הוא d), החלקיק העובר בסדקים הוא אלקטרון. אם אורך הגל שלו הוא מיקרו-מטר אחד, איזה תנע צידי הוא מקבל כדי להגיע אל השיא הראשון (שמתקבל על המסך) שאינו בציר הסימטריה של הניסוי.

3. האפקט הפוטו-אלקטרי, אטום המימן, ופוטנציאל מדרגה (25 נק'):

א. (5 נק') צייר את הניסוי הפוטואלקטרי. הסבר בעזרת גרף של זרם כפונקציה של מתח, את התנהגות המערכת עבור עוצמות הארה שונות (באותו התדר). צייר גרף של מתח העצירה כפונקציה של תדר האור, הוכח באופן מתמטי מהו השיפוע בגרף של מתח העצירה כפונקציה של תדר האור

ב. (5 נק') מהו התדר המינימלי הנידרש בכדי ליינן אטום מימן שנימצא ברמת היסוד שלו (E=-13.6eV)? מהו התדר הנידרש בכדי להעביר אלקטרון מרמת היסוד לרמה המעוררת הראשונה ומה יקרה אם האור הפוגע יהיה בתדר זה?
כמה אטומי מימן שנמצאים ברמת היסוד שלהם ניתן ליינן בשנייה אחת ב-100mW (מילי-ואט) של אור בתדר המינימאלי עבור יינון?

ג. (5 נק') נתון פוטנציאל מדרגה,

$$V(x) = \begin{matrix} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{matrix}$$

חלקיק מגיע אל המדרגה משמאל לימין עם פונקציית גל Ae^{ik_1x}. מהי אנרגיית החלקיק? כתוב את פונקציית הגל בכל תחום עבור המקרים $E < V_0$; $E > V_0$, ואת תנאי השפה החלים עליה.

ד. (10 נק') צייר את צפיפות ההסתברות בכל תחום עבור שני המקרים. מצא את מקדמי ההעברה וההחזרה של השטף עבור המקרה $E > V_0$.
באיזה תנאי לא תהיה החזרה כלל (הראה מתמטית)?

4. תורת הקוונטים – בור פוטנציאל (25 נק'):

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי (כלומר בעומק אינסופי) מרובע ברוחב d. הקיר השמאלי של הבור נמצא בנקודה x = 0.

א. (10 נק') מהי משוואת שרדינגר לחלקיק הזה? האם ניתן להשתמש במשוואה הבלתי תלויה בזמן? הסבר. מהם התנאים החלים על פתרונות המשוואה? מצא/י את <u>כל</u> פתרונות המשוואה בכל תחום כולל בנקודות x = 0 ו- x = d (כולל נרמול וכן התלות בזמן). את הפתרונות נסמן בψ_n. כתוב ביטוי מדויק עבור האנרגיה של כל פתרון E_n.

ב. (5 נק') עבור שני הפתרונות עם האנרגיה הנמוכה ביותר, מהי צפיפות ההסתברות של החלקיק בכל נקודה x? כתוב ביטוי מתמטי, צייר את צפיפות ההסתברות והסבר בכל תחום. כיצד ישתנה הפתרון לסעיף זה עם הקיר השמאלי של הבור יהיה בנקודה d=-x/2 והקיר הימני בנקודה d=+x/2.

ג. (5 נק') עבור חלקיק הנמצא ברמה המעוררת הראשונה (קרי ברמת היסוד), מצא את המיקום הממוצע, והתנע הממוצע, יש להראות חישוב מלא. ניתן להיעזר בתוצאת האינטגרל

$$\int x\sin^2 ax dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4a}\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax + C$$

ד. (5 נק') עבור חלקיק הנמצא ברמה ה-n , כתבו את הביטוי עבור אי הוודאות במיקום ובתנע (פתור במלואו את האינטגרל עבור התנע).

5. מבנה האטום (25 נק'):

לאטום בורון (מספר אטומי 5 ומסה אטומית 11) במצב יסוד יש אלקטרון בודד. נתון צבר אטומי בורון שבו פונקצית הגל של כל אחד מהאלקטרונים היא $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}|\psi_{1,0,0,1/2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{12}}|\psi_{2,1,-1,1/2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_{2,1,1,1/2}\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_{2,1,1,-1/2}\rangle$, במספרים הקוונטיים לקליפה (n), לתנע הזוויתי (l), לרכיב z של התנע הזוויתי (m) ולרכיב z של הספין (m_s) לפי הסדר.

א. (5 נק') הראה/י כי המצב הקוונטי $|\psi\rangle$ מנורמל בתנאי שכל המצבים העצמיים של ההמילטוניאן מנורמלים. מצא/י את ערך התצפית (התוחלת) של $\hat{S}_z$ ושל $\hat{L}_z$, ואי-הוודאות ΔL_z, במצב $|\psi\rangle$

ב. (5 נק') בטבע יש ספין. מצאו לכמה מצבים יש אנרגיה E_2 (n=2) פרט והסבר מהם המצבים. לכמה מצבים יש אנרגיה E_3? מצא נוסחא כללית למספר המצבים עם אנרגיה E_n.

ג. (5 נק') בהזנחת ספין הגרעין והאינטראקציה בין הספין של האלקטרון לבין המסלול שלו, וללא שדה מגנטי חיצוני, האנרגיה של כל איבר ב- $|\psi\rangle$ תלויה רק במספר הקוונטי n. תחת הנחת עבודה זו, איך ישפיע שדה מגנטי אחיד, בכיוון z שגודלו B, על האנרגיה של כל איבר ב- $|\psi\rangle$? כתוב במפורש את האנרגיה של כל איבר במצב $|\psi\rangle$ עם השדה הנתון.

ד. (5 נק') מה יקרה כשהאטומים בצבר זה יעברו במהירות 600 מטר לשנייה דרך מכשיר שטרן-גרלך, בעל גרדיאנט שדה מגנטי 1 גאוס למטר, שאורכו 10 מטרים? כמה כתמים יתקבלו על המסך שנמצא מיד אחרי המכשיר, ומה המרחקים בין הכתמים?

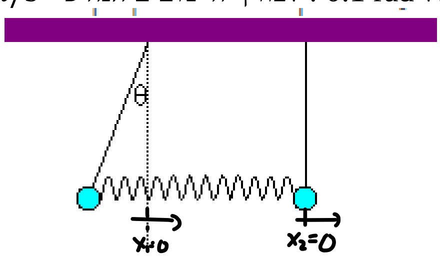
ה. (5 נק') להלן מצב היסוד של אטום המימן לו ערך מקסימאלי כאשר האלקטרון נמצא בתוך הגרעין. הסבר מדוע במציאות האלקטרון לא קורס לגרעין. תן הסבר מתמטי והסבר אינטואיטיבי שמצדיק את ההסבר המתמטי.

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \cdot \exp(-r/a_0)$$

<u>בהצלחה</u>

1. תנודות וגלים (25 נק'):

במערכת הבאה תלויים צמד חוטים באורך 0.1 מטר ובקצותיהם שני כדורים בעלי מסה של 100 גרם. שני הכדורים מחוברים בניהם על ידי קפיץ בעל קבוע קפיץ k=25 N/m. בזמן t=0 הכדור השמאלי מוסט בזווית של 0.1 rad . לצורך חישובים הנח כי $g = 10m/s^2$



א. (10 נק') רשום/י את משוואות התנועה, מצא את התדירויות העצמיות והמצבים העצמיים של המערכת. האם ניתן להניח תנודות קטנות בבעיה זו?
ב. (5 נק') איזו תנועה מתארת כל תדירות עצמית?
ג. (5 נק') מצא את תדירות הפעימות של המערכת, האם ניתן יהיה להבחין בפעימות בבעיה זו? בחר מסה חדשה לכדורים שבה ניתן יהיה להבחין בפעימות.
ד. (5 נק') נתון חליל באורך 1 מטר, (חליל הוא צינור הפתוח שני קצותיו, ומלא אויר) מה התדרים של הצלילים הניתן להפיק בחליל כזה? כעת חוסמים קצה אחד של החליל, מה התדרים של הצלילים שניתן להפיק במצב זה? נתון כי מהירות הקול באויר היא 340 מטר לשניה.

פתרון:

א. משוואות התנועה

$$m\ddot{x}_1 = -mgsin(\theta_1) - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -mgsin(\theta_2) - k(x_2 - x_1)$$
$$x_1 = l\sin(\theta_1)$$
$$x_2 = l\,sin(\theta_2)$$

ניתן להניח תנודות קטנות כי ההסטה הזויתית קטנה

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$ml\ddot{\theta}_1 = -mg\theta_1 - k(l\theta_1 - l\theta_2)$$
$$ml\ddot{\theta}_2 = -mg\theta_2 - k(l\theta_2 - l\theta_1)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\theta_1 - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\ \theta_2 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{g}{l} - \frac{k}{m} & \frac{k}{m}\\ \frac{k}{m} & -\frac{g}{l} - \frac{k}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

$$\omega_1 \quad = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = \sqrt{100} = 10\,\frac{rad}{sec}\ \ ;\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} = \sqrt{100 + \frac{2*25}{0.1}} = \sqrt{100 + 500}$$

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \vec{V}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

ב. התדירות העצמית הראשונה מתארת מצב בו שתי המסות נעות בתיאום, הקפיץ נשאר באורך קבוע. תנועה של מרכז המסה.
התדירות העצמית השנייה מתארת מצב בו שתי המסות נעות בכיוונים הפוכים, מרכז המסה נשאר קבוע, והמרחק היחסי בין שתי המסות מבצע תנועה הרמונית.

ג. תדירות הפעימה היא הפרש התדירויות $\omega_{beat} = \omega_2 - \omega_1$ בשאלה זו נקבל

$$\omega_{beat} = \sqrt{600} - \sqrt{100}\frac{rad}{sec}$$

כדי להבחין בפעימות התדרים צריכים להיות קרובים $\omega_1 \approx \omega_2$, כלומר

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{avg}$$

במקרה זה התדרים לא קרובים ולכן לא נוכל להבחין בפעימות
כדי שנוכל להבחין בפעימות יש להגדיל את המסה, אם נבחר מסה בגודל *5* ק"ג ומעלה נקבל שני תדרים קרובים ונוכל להבחין בפעימות

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = \sqrt{100} = 10\frac{rad}{sec} \;\; ; \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} = \sqrt{100 + \frac{2*25}{5}} = \sqrt{100+10}$$

ד. בחליל פתוח בשני קצותיו יכול להתקיים גל עומד, עם אורכי גל מתאימים. תנאי השפה הנתונים הם של קצה פתוח כלומר התאפסות הנגזרת
ננחש פתרון מצורה $y = A\cos(kx+\phi)$
ונחיל את תנאי השפה $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=L} = 0$$
$$\phi = 0\,; k_n = \frac{\pi}{L}n, \lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{340}{2*1}n = 170*n\;Hz$$

כלומר התדרים שניתן להפיק הם 170, 340, 510... הרץ
כפולות שלמות של התדר היסודי 170 הרץ

כאשר נסגור קצה אחד נקבל תנאי שפה חדשים, של קצה סגור, כלומר התאפסות התנודה.

$$\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0$$
$$y(L) = 0$$
$$\phi = 0\,; k_n = \frac{\pi}{2L}(2n-1), \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{340}{4*1}(2n-1) = 85*(2n-1)\;Hz$$

כלומר התדרים שניתן להפיק הם 425,*255*,85 ... הרץ
כפולות אי זוגיות של התדר היסודי 85 הרץ

2. התאבכות (25 נק'):

א. (5 נק') פתחו את הנוסחה לתבנית ההתאבכות בניסוי שני הסדקים (בצעו ממוצע על הזמן). אין צורך לבצע את כל האינטגרל. (האינטגרל מ-0 ל-T על $cos^2\ (\omega t)$ עם נרמול של $1/_T$ שווה לחצי).

ב. (10 נק') כאשר מאירים שני סדקים (אורך גל 864.5 ננומטר באויר), המרחק בין נקודות האור על המסך הוא 0.8 מ"מ (מרחק הסדקים מהמסך הוא 80 ס"מ). אם כל הניסוי מבוצע במים (n=1.33), מהו המרחק בין הסדקים? במהלך הניסוי נכנסת בועת אוויר (n=1) שעובייה t לסדק השמאלי. מה משתנה בתמונת ההתאבכות? יש לתת ביטוי תוך שימוש בפרמטרים הנתונים בלבד. מה ערכו של t כדי שדבר בתמונת ההתאבכות לא ישתנה ביחס לתמונה שהתקבלה קודם לכן?

ג. (5 נק') במעבר בסדק בודד, רוב העוצמה נשלחת למקסימום (שיא) המרכזי של תבנית הדיפרקציה. הניחו שכל העוצמה הולכת אל המקסימום המרכזי, חישבו מה צריך להיות רוחב הסדקים בניסוי שני הסדקים, כדי שנראה בצורה חדה לפחות שבעה שיאים מתבנית ההתאבכות של שני הסדקים.

ד. (5 נק') (לא קשור בסעיפים הקודמים) בניסוי שני הסדקים (המרחק בין הסדקים הוא d), החלקיק העובר בסדקים הוא אלקטרון. אם אורך הגל שלו הוא מיקרו-מטר אחד, איזה תנע צידי הוא מקבל כדי להגיע אל השיא הראשון (שמתקבל על המסך) שאינו בציר הסימטריה של הניסוי.

א.

נחבר שני גלים עם אמפליטודה, אורך גל ותדר זהים

$$E_{total} = E_1 + E_2 = A\cos{(\omega t - kx_1)} + A\cos{(\omega t - kx_2)} = 2A\cos{(\omega t - kx_{av})}\cos{(\frac{k\Delta x}{2})}$$

$$I_{total} = E_{total}^2 = 4A^2\cos^2{(\omega t - kx_{av})}\cos^2{(\frac{k\Delta x}{2})}$$

נבצע מיצוע על הזמן

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T E^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T 4A^2\cos^2{(\omega t - kx_{av})}\cos^2{(\frac{k\Delta x}{2})}\, dt$$

$$I = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kx_{av})\, dt\right) 4A^2 \cos^2{(\frac{k\Delta x}{2})}$$

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kx_{av})\, dt\right) = \frac{1}{2}$$

$$I = 2A^2 \cos^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right); \Delta x = d\sin{(\theta)}$$

ב. נתון $\lambda_{air} = 864.5 \cdot 10^{-9}\ n = 1.33\ L = 0.8\ m\ \ , \Delta y = 0.8mm$

נמצא את המרחק בין שתי נקודות מקסימום, בעזרת הפרש הדרכים

הפרשים הדרכים צריך להיות אורך גל שלם

$$\Delta x = \lambda$$

$$d\sin\left(\theta_{max,1}\right) = \lambda$$

$$d\theta_{max,1} = \lambda$$

$$\theta_{max,1} = \frac{\lambda}{d}$$

$$\Delta y = \theta L = \frac{\lambda}{d} L$$

הניסוי מתרחש מתחת למים כלומר אורך הגל יהיה

$$\lambda_{water} = \frac{\lambda_{air}}{n}$$

$$d = \frac{\lambda_{water}}{\Delta y} L = \frac{\lambda_{air}}{\Delta y\ n} L = \frac{864.5 \cdot 10^{-9}}{0.8 \cdot 10^{-3} \cdot 1.33} \cdot 0.8 = 6.5 \cdot 10^{-4}$$

כאשר תיכנס בועית אוויר לסדק, נקבל הפרש פאזה נוסף בין הסדקים, ותבנית ההתאבכות תזוז, אך צורתה לא תשתנה

על מנת שנצפה באותה תבנית התאבכות, הפרש הפאזה המתקבל צריך להיות כפולה של 2π
הפרש הפאזה הנוסף בין הסדקים הוא

$$\Delta\phi_{bubble} = k_{water}t - k_{air}t = 2\pi m$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{water}} - \frac{2\pi}{\lambda_{air}}\right)t = 2\pi m$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_{water}} - \frac{1}{\lambda_{air}}\right)t = m$$

$$\frac{1}{\lambda_{air}}(n-1)t = m$$

$$\frac{1}{\lambda_{air}}(0.33)t = m$$

$$t = m\frac{\lambda_{air}}{(0.33)}$$

ג.

נסמן את רוחב הסדקים באות D

נחשב את רוחב הכתם המרכזי בהתאבכות מסדק יחיד, נקודת המינימום נתונה לפי תנאי על הפרש הדרכים

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{D}{2}\sin(\theta_{min}) = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$\frac{D}{2}\theta_{min} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{D}$$

רוחב הכתם הוא המרחק בין שני המינימות הראשונות

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{D}$$

כעת נמצא את המפתח הזויתי של בין שיא לשיא בתבנית ההתאבכות של שני סדקים
הפרשים הדרכים צריך להיות אורך גל שלם

$$\Delta x = \lambda$$

$$d\sin\left(\theta_{max,1}\right) = \lambda$$

$$d\theta_{max,1} = \lambda$$

$$\theta_{max,1} = \frac{\lambda}{d}$$

כלומר כדי שייכנסו 7 שיאים, רוחב הכתם המרכזי צריך להיות

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{D} = 7\theta_{max} = 7\frac{\lambda}{d}$$

כלומר

$$D = \frac{2d}{7}$$

ד. נגדיר את ציר x כציר הסימטריה (אנך לסדקים ולמסך), האלקטרון מתחיל עם תנע בכיוון x , p_x ולאחר המעבר בסדקים הוא מוסט לכיוון השיא הראשון, ומקבל תנע p_y.

$$\tan(\theta) = \frac{p_y}{p_x}$$

בסעיף קודם חישבנו את הזוית

$$\tan(\theta) \approx \theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{p_y}{p_x}$$

התנע ההתחלתי (בכייון x) נתון לפי אורך גל דה-ברולי, $p_x = \frac{h}{\lambda}$

וקיבלנו

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{p_y}{h/\lambda} \rightarrow p_y = \frac{h}{d}$$

3. האפקט הפוטו-אלקטרי, פוטנציאל מדרגה (25 נק'):

א. (5 נק') צייר את הניסוי הפוטואלקטרי. הסבר בעזרת גרף של זרם כפונקציה של מתח, את התנהגות המערכת עבור עוצמות הארה שונות (באותו התדר). צייר גרף של מתח העצירה כפונקציה של תדר האור, הוכח באופן מתמטי מהו השיפוע בגרף של מתח העצירה כפונקציה של תדר האור

ב. (5 נק') מהו התדר המינימלי הנידרש בכדי ליינן אטום מימן שנימצא ברמת היסוד שלו (E=-13.6eV)? מהו התדר הנידרש בכדי להעביר אלקטרון מרמת היסוד לרמה המעוררת הראשונה ומה יקרה אם האור הפוגע יהיה בתדר זה? כמה אטומי מימן שנמצאים ברמת היסוד שלהם ניתן ליינן בשנייה אחת ב-100mW (מילי-ואט) של אור בתדר המינימאלי עבור יינון?

ג. (5 נק') נתון פוטנציאל מדרגה,

$$V(x) = \begin{matrix} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{matrix}$$

חלקיק מגיע אל המדרגה משמאל לימין עם פונקציית גל Ae^{ikx}. מהי אנרגיית החלקיק? כתוב את פונקציית הגל בכל תחום עבור המקרים $E < V_0$; $E > V_0$, ואת תנאי השפה החלים עליה.

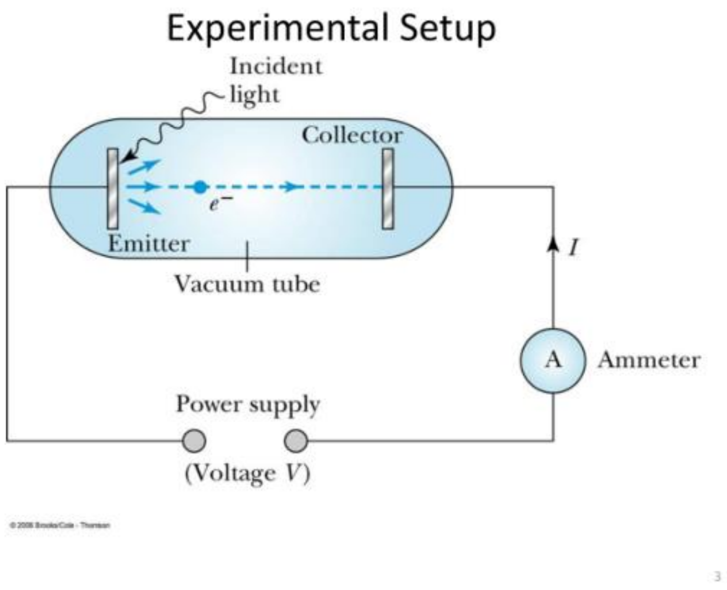
ד. (10 נק') צייר את צפיפות ההסתברות בכל תחום עבור שני המקרים. מצא את מקדמי ההעברה וההחזרה עבור המקרה $E > V_0$.

באיזה תנאי לא תהיה החזרה כלל?

פתרון

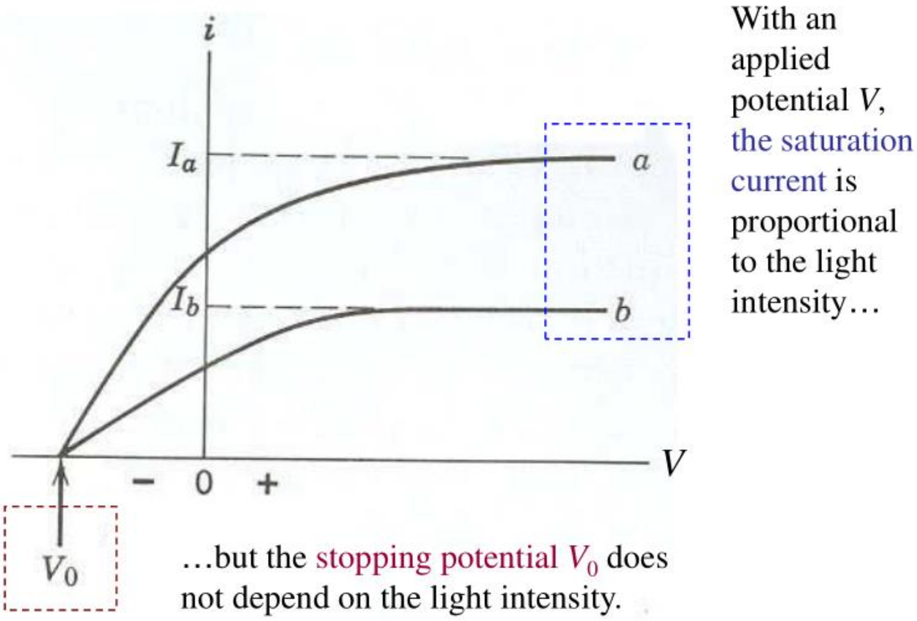
א.

הניסוי מורכב ממקור אור, אנודה וקטודה בתוך שפורפרת ואקום, ומקור מתח

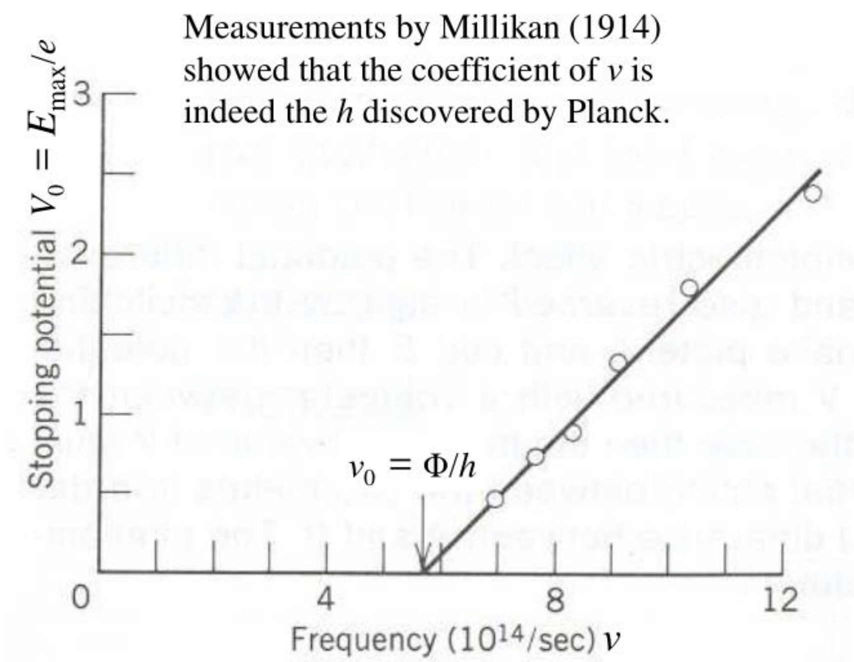


איור 2: תיאור הניסוי לבדיקת האפקט הפוטואלקטרי

זרם כפונקציה של מתח, עבור שתי עוצמות אור. זרם הרוויה תלוי בעוצמת האור, מתח העצירה לא תלוי בעוצמת באור



גרף שני – מתח עצירה כפונקציה של תדירות האור, מגרף זה ניתן לחלץ את פונקציית העבודה ואת קבוע פלאנק



ניתן למצוא את שיפוע הגרף מהנוסחא

$$eV_0 = h\nu - \Phi$$

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{\Phi}{e}$$

כלומר שיפוע הגרף הוא $\frac{h}{e}$ קבוע פלאנק חלקי מטען האלקטרון

ב.

כדי ליינן אטום מימן צריך להעביר את האלקטרון מאנרגיה $-13.6eV$ לאנרגיה 0, כלומר על הפוטון להיות לפחות בעל אנרגיה של $13.6eV$. אנרגייה של פוטון היא fh ולכן התדר שלו צריך לקיים

$$f > f_I = \frac{13.6eV}{h} = \frac{13.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J}{6.63 \cdot 10^{-34} Js} = \frac{13.6 \cdot 1.6}{6.63} 10^{15} Hz \approx 3300THz \quad (36)$$

התדר המינימאלי ליינון מימן הוא $f_I \approx 3300THz$.
הפרש האנרגיה בין רמת היסוד לרמה המעוררת הראשונה באטום המימן הוא:

$$-13.6eV \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 13.6 \cdot \frac{3}{4} eV \quad (37)$$

כלומר צריך $\frac{3}{4}$ מהאנרגיה שדרושה ליינון. בכדי להעביר את האלקטרון מרמת היסוד לרמה המעוררת הראשונה על הפוטון להיות בעל תדר פי $\frac{3}{4}$ מהתדר שנדרש ליינון

$$f_{1\to 2} = \frac{3}{4} \frac{13.6 \cdot 1.6}{6.63} 10^{15} Hz \approx 2500THz \quad (38)$$

אם האור הפוגע יהיה בתדר זה הוא ייבלע ע"י אטומי המימן (ומאוחר יותר ייפלט, כאשר האלקטרונים יחזרו למצב היסוד, אבל בכיוון אקראי ולאו דווקא בכיוון המקורי של האור הפוגע). לכן אם נעביר אור בתדרים שונים דרך גז של אטומי מימן ונמדוד את עוצמת האור המועבר נראה עוצמה מועברת נמוכה בתדר זה.

כל פוטון מיינן אלקטרון בודד. נחשב כמה פוטונים פוגעים בכל שנייה. לכל פוטון יש אנרגיה $13.6eV$ ובכל שנייה פוגעת אנרגיה של $100mJ$. לכן מספר הפוטונים שפוגעים במתכת כל שנייה, שהוא גם מספר האלקטרונים שניתן ליינן בכל שנייה:

$$\frac{100mJ}{13.6eV}=\frac{0.1J}{13.6\cdot1.6\cdot10^{-19}J}=\frac{1}{13.6\cdot1.6}10^{18}\approx5\cdot10^{16} \tag{39}$$

ג.

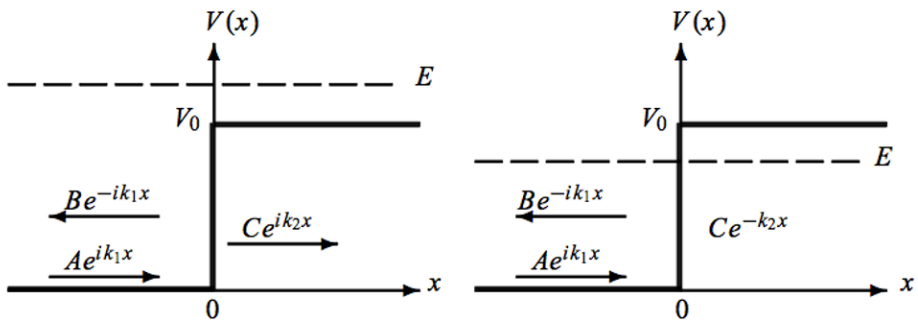
(5 נק') נתון פוטנציאל מדרגה,

$$V(x)=\begin{matrix}0 & x<0\\ V_0 & x>0\end{matrix}$$

חלקיק מגיע אל המדרגה משמאל לימין עם פונקציית גל Ae^{ik_1x}. מהי אנרגיית החלקיק? כתוב את פונקציית הגל בכל תחום עבור המקרים $E>V_0$; $E<V_0$, ואת תנאי השפה החלים עליה.

פתרון:

אנרגיית החלקיק $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$



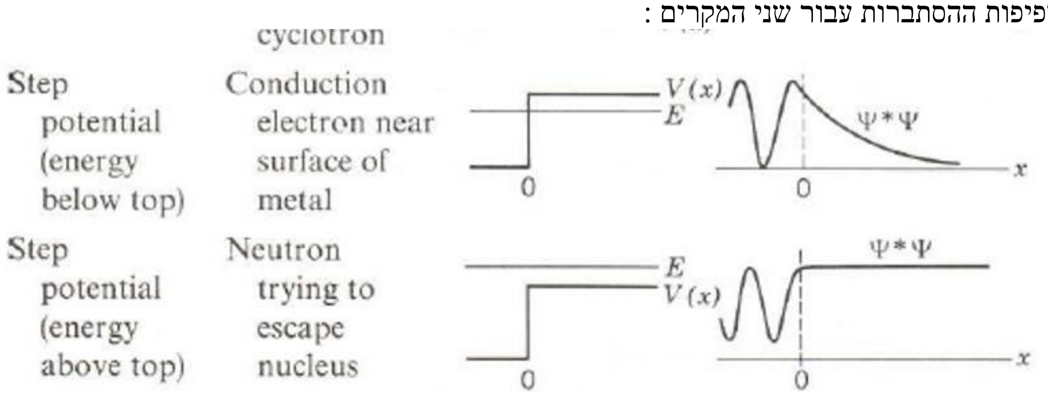
$E>V_0$ $\qquad$ $E<V_0$

$$k_2=\sqrt{\left\{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\right\}} \qquad k_2=\sqrt{\left\{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\right\}}$$

תנאי השפה הם רציפות פונקציית הגל ורציפות הנגזרת בנקודה $x=0$

ד.

צפיפות ההסתברות עבור שני המקרים :



נמצא את מקדמי ההעברה וההחזרה עבור המקרה $E>V_0$

לפי רציפות נקבל

$$A+B=C$$

לפי רציפות הנגזרת נקבל

$$ikA - ikB = ik_2C$$

נסדר ונקבל

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

כאשר $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$

מקדמי העברה והחזרה של השטף (הסיכוי שחלקיק יעבור את המדרגה או יוחזר) הם

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \; ; \; T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{k_2}{k_1}$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 \; ; T = \left|\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right|^2 \frac{k_2}{k_1}$$

המצב היחיד שבו לא תהיה החזרה, $R = 0$ הוא כאשר $k_1 = k_2$ כלומר $V_0 = 0$, כלומר אין מדרגה והפוטנציאל קבוע בכל המרחב.

בור פוטנציאל אינסופי

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי (כלומר בעומק אינסופי) מרובע ברוחב d. הקיר השמאלי של הבור נמצא בנקודה $x = 0$

א. (10 נק') מהי משוואת שרדינגר לחלקיק הזה? האם ניתן להשתמש במשוואה הבלתי תלויה בזמן? הסבר. מה הם התנאים החלים על פתרונות המשוואה? מצא/י את <u>כל</u> פתרונות המשוואה בכל תחום כולל בנקודות $x = 0, x = d$(כולל נרמול וכן התלות בזמן). את הפתרונות נסמן ב ψ_n. כתוב ביטוי מדוייק עבור האנרגיה של כל פתרון E_n

פתרון

משוואת שרדינגר התלויה בזמן

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t)$$

כאשר הפוטנציאל בתוך הבור הוא $V = 0$ ומחוץ לבור $V = \infty$.

ניתן להשתמש במשוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן, כיוון שהפוטנציאל לא תלוי בזמן. כלומר נקבל את המשוואה

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)$$

בתחום שבתוך הבור $V = 0$ נקבל

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)$$

מחוץ לבור $V = \infty$ גורר שפונקציית הגל מתאפסת $\psi(x) = 0$ בתחום $x < 0$ ועבור $x > d$

התנאים על המשוואה היא רציפות, כלומר $\psi(0) = 0, \psi(d) = 0$

הפתרון הכללי למשוואה שקיבלנו בתוך הבור הוא

$$\psi(x) = Asin(kx + \varphi)$$

בהצבה של תנאי השפה נקבל

$$\varphi = 0, k_n = \frac{\pi}{d}n$$

כעת נמצא את מקדם הנרמול

$$\int_0^d P(x)dx = 1$$

$$\int_0^d A_n^2 sin^2(k_n x) = 1$$

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{d}}$$

הפתרון הכללי כולל הנרמול ותלות בזמן הוא־

$$\psi_n(x,t) = A_n sin(k_n x) \cdot e^{-i\omega_n t}$$

כאשר

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{d^2}n^2$$

ב. (5 נק) עבור שני הפתרונות עם האנרגיה הנמוכה ביותר, מהי צפיפות ההסתברות של החלקיק בכל נקודה x? כתוב ביטוי מתמטי, צייר את צפיפות ההסתברות והסבר בכל תחום.

$$P = |\psi(x)|^2$$

מחוץ לבור צפיפות ההסתברות היא אפס, בתוך הבור

$$P_n = |A_n sin(k_n x)|^2 = A_n^2 sin^2(k_n x)$$

ציור צפיפות ההסתברות בתוך הבור ל3 הרמות הראשונות (נדרשו 2 הרמות הראשונות) מוצגת באיור 1.

אם נזיז את הבור ככה שמרכז הבור יהיה ב $x = 0$, צורת הפתרון תישמר, רק תזוז יחד עם הבור, הפונקציה שמתארת את צפיפות ההסתברות ל2 הרמות הראושות תהיה

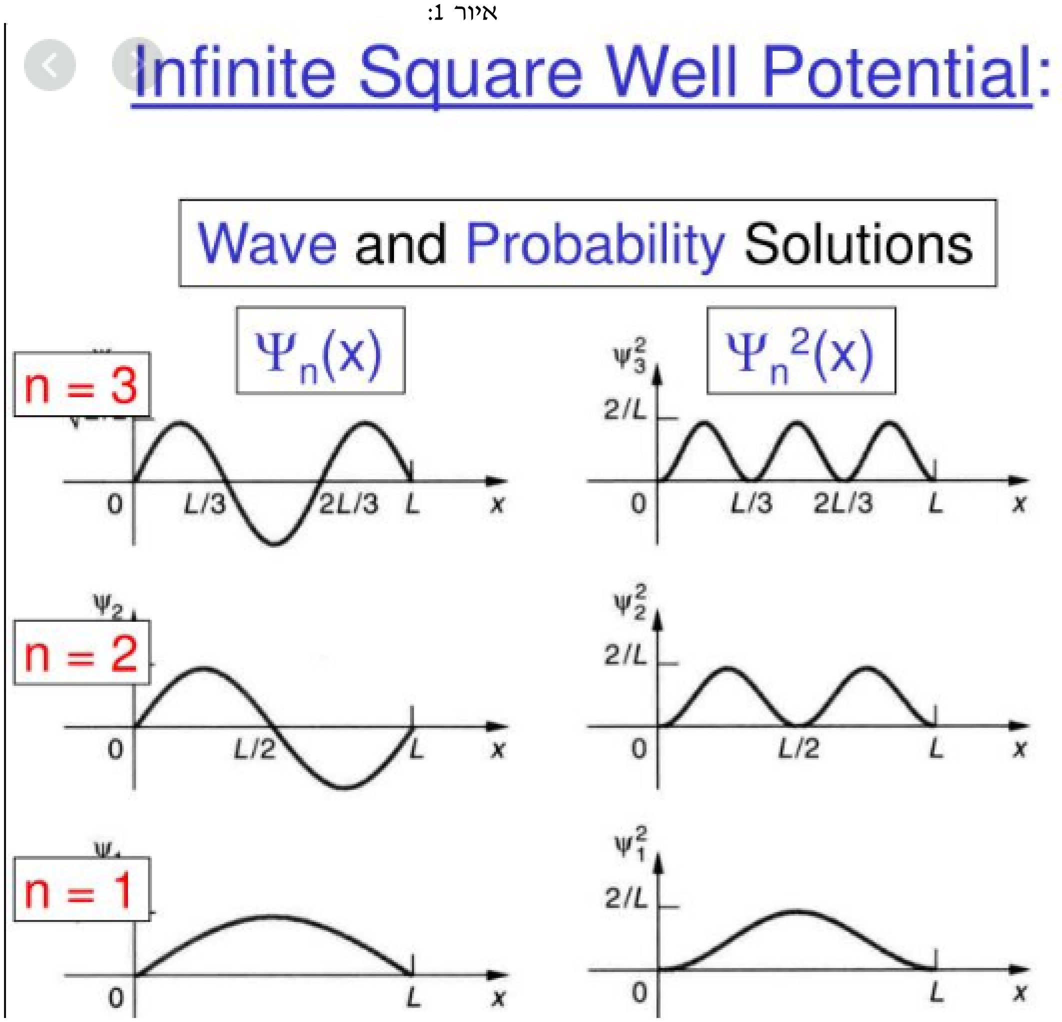
$$\psi_1 = A_1^2 cos^2\left(\frac{\pi}{d}x\right)$$

$$\psi_2 = A_2^2 sin^2\left(\frac{\pi}{d}2x\right)$$

ג. (5 נק') עבור חלקיק הנמצא ברמה המעוררת הראשונה (קרי ברמת היסוד) , מצא את המיקום הממוצע, והתנע הממוצע, יש להראות חישוב מלא. ניתן להיעזר בתוצאת האינטגרל

$$\int x\sin^2 ax dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4a}\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax + C$$

איור 1:


Infinite Square Well Potential:
Wave and Probability Solutions
Ψn(x)
Ψn2(x)
n = 3
n = 2
n = 1
0
L/3
2L/3
L
x
L/2
2/L
ψ2
ψ1
ψ32
ψ22
ψ12

$$< x >= \int_0^d x \cdot |\psi(x)|^2 dx = \int_0^d x \cdot A_n^2 sin^2 \left(\frac{\pi}{d} x\right) dx = \frac{d}{2}$$

$$< \hat{p} >=< \psi|\hat{p}|\psi >= \int_0^d \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx = \int_0^d A_n sin \left(\frac{\pi}{d} x\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) A_n sin \left(\frac{\pi}{d} x\right) dx$$
$$= \int_0^d A_n sin \left(\frac{\pi}{d} x\right) (-i\hbar) A_n cos \left(\frac{\pi}{d} x\right) \frac{\pi}{d} dx = 0$$

ד. (5 נק') עבור חלקיק הנמצא ברמה ה n , כתבו את הביטוי עבור אי הוודאות במיקום ואי הוודאות בתנע אין צורך לפתור את האינטגרלים.

אי הוודאות נתון לפי

$$\Delta x = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - < x >^2}$$

כאשר

$$< x >= \int_0^d x \cdot |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^d x \cdot A_n^2 sin^2 \left(\frac{\pi}{d} nx\right) dx = \frac{d}{2}$$

$$< x^2 >= \int_0^d x^2 \cdot |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^d x^2 \cdot A_n^2 sin^2 \left(\frac{\pi}{d} nx\right) dx$$

$$\Delta p = \sqrt{Var(p)} = \sqrt{\langle p^2 \rangle - < p >^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$$

$$< p >= 0$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^d \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi(x) dx = \int_0^d A_n sin \left(\frac{\pi}{d} nx\right) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A_n sin \left(\frac{\pi}{d} nx\right) dx$$
$$= \int_0^d A_n sin \left(\frac{\pi}{d} nx\right) (\hbar^2) A_n sin \left(\frac{\pi}{d} nx\right) \frac{\pi^2}{d^2} n^2 dx = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{d^2}$$

$$\Delta p = \frac{\hbar \pi n}{d}$$

שאלה 5 ־ מבנה האטום

סעיף א

כיוון שהמצבים העצמיים של ההמילטוניאן הינם תמיד אורתוגונאליים אז אם הם גם מנורמלים הם אורתונורמליים, כלומר:

$$\left\langle \psi_{n,l,m,m_s} \middle| \psi_{n',l',m',m_s'} \right\rangle = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{nn'}\delta_{m_s m_s'} \tag{1}$$

נראה כי גם המצב שנתון לנו מנורמל:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\left\langle\psi_{1,0,0,1/2}\right| - \frac{i}{\sqrt{12}}\left\langle\psi_{2,1,-1,1/2}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\psi_{2,1,1,1/2}\right| + i\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle\psi_{2,1,1,-1/2}\right|\right)\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{12}}\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\left\langle \psi_{1,0,0,1/2} \middle| \psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle - \frac{i}{\sqrt{12}}\frac{i}{\sqrt{12}}\left\langle \psi_{2,1,-1,1/2} \middle| \psi_{2,1,-1,1/2}\right\rangle$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\psi_{2,1,1,1/2} \middle| \psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\langle\psi_{2,1,1,-1/2} \middle| \psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle =$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1+1+6+4}{12} = 1 \tag{2}$$

ערך התצפית של $\hat{S}_z$:

$$\langle S_z\rangle = \langle\psi|\,\hat{S}_z\,|\psi\rangle =$$

$$\langle\psi|\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\hat{S}_z\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{12}}\hat{S}_z\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_z\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{S}_z\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right) =$$

$$\langle\psi|\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\frac{\hbar}{2}\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{12}}\frac{\hbar}{2}\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{2}\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right) =$$

$$\frac{1}{12}\frac{\hbar}{2}+\frac{1}{12}\frac{\hbar}{2}+\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}-\frac{1}{3}\frac{\hbar}{2}=\hbar\left(\frac{1+1+6-4}{24}\right)=\frac{\hbar}{6} \tag{3}$$

ערך התצפית של $\hat{L}_z$:

$$\langle L_z\rangle=\langle\psi|\,\hat{L}_z\,|\psi\rangle=$$

$$\langle\psi|\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\hat{L}_z\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle+\frac{i}{\sqrt{12}}\hat{L}_z\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}_z\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle-i\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{L}_z\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right)=$$

$$\langle\psi|\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot 0\cdot\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle+\frac{i}{\sqrt{12}}\left(-\hbar\right)\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle-i\frac{1}{\sqrt{3}}\hbar\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right)=$$

$$-\frac{\hbar}{12}+\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{3}=\hbar\left(\frac{-1+6+4}{12}\right)=\frac{3\hbar}{4} \tag{4}$$

כדי למצוא את אי הוודאות ΔL_z נמצא קודם כל את $\left\langle L_z^2\right\rangle$:

$$\left\langle L_z^2\right\rangle=\langle\psi|\,\hat{L}_z^2\,|\psi\rangle=$$

$$\langle\psi|\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\hat{L}_z^2\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle+\frac{i}{\sqrt{12}}\hat{L}_z^2\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}_z^2\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle-i\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{L}_z^2\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right)=$$

$$\langle\psi|\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot 0^2\cdot\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle+\frac{i}{\sqrt{12}}\left(-\hbar\right)^2\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar^2\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle-i\frac{1}{\sqrt{3}}\hbar^2\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle\right)=$$

$$\frac{\hbar^2}{12}+\frac{\hbar^2}{2}+\frac{\hbar^2}{3}=\hbar^2\left(\frac{1+6+4}{12}\right)=\frac{11\hbar^2}{12} \tag{5}$$

וכעת נמצא את אי הודאות:

$$\Delta L_z=\sqrt{\langle L_z^2\rangle-\langle L_z\rangle^2}=\sqrt{\frac{11}{12}\hbar^2-\frac{9}{16}\hbar^2}=\sqrt{\frac{44-27}{48}\hbar^2}=\sqrt{\frac{17\hbar^2}{48}}=\sqrt{\frac{17}{48}}\hbar$$

סעיף ב

לפי הכללים למספרים הקוונטים, $n > l \geq 0$ $l \geq m_l \geq -l$

n	l	m_l	#of m_l	m_s	#of states (n)
1	0	0	1	$\pm\frac{1}{2}$	2
2	0	0	1	$\pm\frac{1}{2}$	8
	1	$1, 0, -1$	3	$\pm\frac{1}{2}$	
3	0	0	1	$\pm\frac{1}{2}$	18
	1	$1, 0, -1$	3	$\pm\frac{1}{2}$	
	2	$2, 1, 0, -1, -2$	5	$\pm\frac{1}{2}$	

אנחנו רואים כי קיבלנו סדרה חשבונית,

$$\#\text{of states}(n) = 2(1+3+5+....+(2n-1)) = 2(1+(2n-1))\cdot(n/2) = 2(2n)(n/2) = 2n^2$$

סעיף ג

שדה מגנטי אחיד בעוצמה B ובכיוון z ישנה את האנרגיה של כל איבר בהתאם לתנע הזוויתי שלו בכיוון z ולספין בכיוון z ע"י הוספת אנרגיה פוטנציאלית מגנטית:

$$U_B = -\mu_B B\,(m + 2m_s) \tag{6}$$

האנרגיה של $\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle$ תשתנה ב $-\mu_B B$
האנרגיה של $\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle$ לא תשתנה
האנרגיה של $\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle$ תשתנה ב $-2\mu_B B$
האנרגיה של $\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle$ לא תשתנה
ידוע כי האנרגיה של מצב תלויה במספר הקוונטי n, עם הקשר הבא

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6[eV]\cdot 1.6\cdot 10^{-19}[J/eV]}{n^2}$$

לכן נקבל

$$E\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle = E_1 - \mu_B B$$

$$E\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle = E_2$$

$$E\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle = E_2 - 2\mu_B B$$

$$E\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle = E_2$$

סעיף ד

כאשר האטומים עוברים במכשיר שטרן־גרלך פועל עליהם כח בכיוון z, $F=-\frac{\partial U_B}{\partial z}$. כח זה יגרום לאטומים לסטות מכיוונם המקורי ולפגוע במסך ב $z=\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$. כאשר $t=\frac{L}{v}$ הוא משך הזמן שהאטומים שוהים במכשיר שטרן־גרלך, L אורך מכשיר שטרן־גרלך, v מהירות האטומים ו m מסתם. כיוון שמסת הפרוטון והניוטרון קרובות מאוד זו לזו וגדולות בהרבה ממסת האלקטרון נוכל לומר כי בקירוב טוב מאוד מסת אטומי הבורון היא $11m_p$, כאשר m_p מסת הפרוטון. לפי סעיף ג האטומים שלנו יתפצלו ל3 כאשר האטומים במצב $\left|\psi_{1,0,0,1/2}\right\rangle$ ירגישו כח $F=\mu_B\frac{\partial B}{\partial z}=\mu_B G$, כאשר נתון כי הגרדיאנט $G=\frac{\partial B}{\partial z}=1T/m$ ולכן יפגעו ב $z=\frac{1}{2}\frac{\mu_B G}{11m_p}\left(\frac{L}{v}\right)^2$. האטומים במצב $\left|\psi_{2,1,1,1/2}\right\rangle$ ירגישו כח $F=2\mu_B G$ ולכן יפגעו ב $z=\frac{\mu_B G}{11m_p}\left(\frac{L}{v}\right)^2$. האטומים במצבים $\left|\psi_{2,2,-1,1/2}\right\rangle$ ו $\left|\psi_{2,1,1,-1/2}\right\rangle$ לא ירגישו כח כלל, לכן יפגעו ב $z=0$. בסך הכל יתקבלו בניסויי שלושה כתמים כאשר המרחק בין שני כתמים סמוכים

$$\frac{1}{2}\frac{\mu_B G}{11m_p}\left(\frac{L}{v}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{9.274\cdot10^{-24}\frac{J}{T}\cdot1\frac{T}{m}}{11\cdot1.67\cdot10^{-27}kg}\cdot\left(\frac{10m}{600\frac{m}{s}}\right)^2=$$

$$\frac{9.274}{11\cdot1.67\cdot7.2}m\approx0.07m \qquad (7)$$

סעיף ה

הסיבה המתמטית שהאלקטרון לא קורס לגרעין היא שפונקציית צפיפות ההסתברות שלו כוללת את היעקוביאן:

$$P\left(r\right)=4\pi\left|\psi_{1,0,0}\left(r\right)\right|^2r^2dr \qquad (8)$$

כאשר 4π מגיע מהאינטגרל על הזוויות $4\pi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$. לכן צפיפות ההסתברות דווקא קטנה כאשר r מתקרב ל 0. אינטואטיבית ניתן לראות זאת כיוון שלכל רדיוס r האלקטרון יכול להיות בקליפה ששטחה $4\pi r^2$ סביב הגרעין, ככל ש r קטן הקליפה הזו קטנה ואיתה מספר המיקומים האפשריים עבור האלקטרון, מה שגורם לצפיפות ההסתברות שלו להיות מאוד קטנה קרוב לגרעין למרות שפונקציית הגל גדלה.