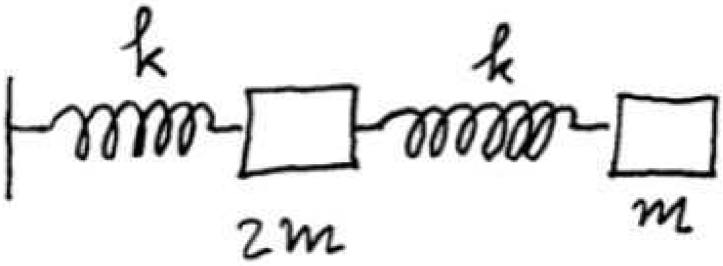
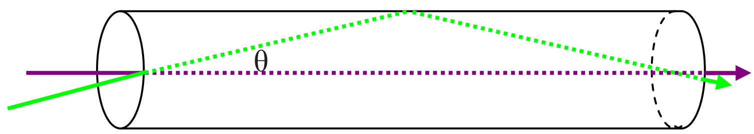
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

תאריך הבחינה: 20 ביוני 2011
שמות המרצים: פרופ' רון פולמן
מבחן בקורס: פיסיקה 3 להנדסת חומרים
מס' קורס: 203-1-2391
שנה: 2011, סמסטר ב', מועד א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחות אחיד, מצורף למבחן
אין להשתמש במחשבון או כל חומר עזר אחר!

1. (30 נק') נתונה המערכת הבאה ובה שני גופים בעלי מסה ושני קפיצים בעלי קבוע קפיץ k

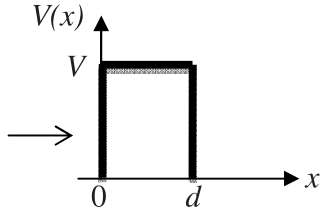


א. (5 נק') כתוב את משוואות התנועה
ב. (5 נק') מצא מצבים עצמיים ותדירויות עצמיות
ג. (10 נק') נתון שבזמן t=0 הגוף השמאלי נמצא בנקודת שיווי המשקל שלו והגוף הימני נמצא במרחק a ימינה מנקודת שיווי המשקל שלו. מצא את מיקום הגופים בכל זמן.
ד. (10 נק') (לא קשור לשאלה הקודמת) נתון תווך בצורת גליל מלא של חומר ושני גלי קול שנכנסים לתוכו משמאל לימין כמתואר בציור הבא (הזוית היא 10 מעלות)



אם ידוע כי בנקודת היציאה מהתווך מתאבכים הגלים בהתאבכות בונה, מהו אורך התווך המינימלי?
נתון כי תדר הגל הוא 1kHz ומהירות הקול בתוך התווך 100m/s.

2. (30 נק') חלקיק בעל מסה m ומספר גל k_1 נשלח משמאל אל מחסום פוטנציאלי מרובע ברוחב d וגובה V. אנרגיית החלקיק נמוכה מ-V .



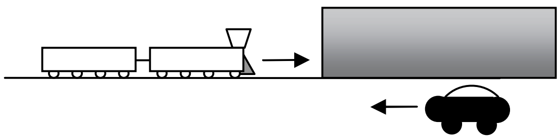
א. (5 נק') מהי משוואת שרדינגר לחלקיק? האם ניתן להשתמש במשוואה הבלתי תלויה בזמן? הסבר. מהם התנאים החלים על פתרונות המשוואה?

ב. (15 נק') מצא/י את פתרון המשוואה בכל התחום כולל בנקודות $x = 0$ ו- $x = d$. כלומר, בטא את גודלן של כל האמפליטודות בפתרון כפונקציה של האמפליטודה של הגל שהצליח לעבור את המחסום.

ג. (5 נק') מהי ההסתברות היחסית למצוא את החלקיק בכל נקודה x? אין צורך לפתור מתמטית. צייר והסבר בכל תחום.

ד. (5 נק') הוכח/הוכיחי מתמטית כי גם פונקצית ההסתברות P(x) ונגזרתה רציפות בכל גבול בין תחומים שונים (למשל ב x=d) והשתמש בכך בכדי להסביר מדוע פונקצית הגל בתוך המחסום אינה יכולה לתאר רק גל הנעה ימינה.

3. (20 נק') רכבת באורך L (במערכת הייחוס שלה) נכנסת משמאל למנהרה. לפי בוב, העומד באמצע המנהרה, מהירות הרכבת היא v (קבועה) ואורכה הוא S. כשראש הרכבת מגיע לקצה הימיני של המנהרה, חישן שם מצלצל רגעית; כמו כן, כשהזנב של הרכבת נכנס למנהרה, חישן שם (בקצה השמאלי של המנהרה) מצלצל רגעית. לפי בוב, החישנים מצלצלים ביחד ורגעית הרכבת היא כולה בתוך המנהרה וממלאת אותה מן הקצה עד הקצה. בכביש ליד המנהרה, נוסעת אליס במכוניתה במהירות $v-$ ביחס למנהרה (כלומר בכיוון הפוך להרכבת).



א. (5 נק') מהו v כתלות ב- L ו-S?

ב. (5 נק') מהי המהירות היחסית בין הרכבת לבין אליס?

ג. (5 נק') מהי האורך של הרכבת לפי אליס?

ד. (5 נק') לפי בוב, שני החישנים מצלצלים בהפרש זמן Δt=0 ובהפרש מיקום Δx=S. מהם ההפרשים המקבילים $\Delta x'$, $\Delta t'$ לפי אליס, כתלות ב- L, S ו-v? איזה חישן מצלצל קודם, לפיה?

4. (20 נק') לאטום בור (Z=5) במצב יסוד אלקטרון בודד בעל $l = 1$. נתון צבר אטומי בור שבו פונקצית הגל של אותו אלקטרון היא $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\psi_{2,1,-1,1/2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_{2,1,1,1/2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_{2,1,1,-1/2}\rangle$, במספרים הקוונטיים לקליפה (n), לתנע הזוויתי (l), לרכיב z של התנע הזוויתי (m) ולרכיב z של הספין (m_s) לפי הסדר.

א. (5 נק') הראה/י כי המצב הקוונטי $|\psi\rangle$ מנורמל בתנאי שכל איבר $|\psi_{2,1,\pm1,\pm1/2}\rangle$ הינו מנורמל.

ב. (5 נק') מצא/י את ערך התצפית של $\hat{S}_z$ ושל $\hat{L}_z$, ואי-הוודאות ΔL_z, במצב $|\psi\rangle$.

ג. (5 נק') בהזנחת ספין הגרעין והאינטראקציה בין הספין של אותו אלקטרון לבין המסלול שלו, לכל האיברים ב- $|\psi\rangle$ אותה אנרגיה. איך ישפיע שדה מגנטי אחיד, בכיוון z, על האנרגיה של כל איבר?

ד. (5 נק') מה יקרה כשהאטומים בצבר זה יעברו דרך מכשיר שטרן-גרלך? לכמה אלומות יתפצל הצבר?

<u>**בהצלחה**</u>

Solution Moed A 2011

Question 1:

1.

א)
$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{2m}x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

ב)
$$\omega_1^2 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{k}{m}$$
$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ג)
$$x_1(t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + \frac{B}{\sqrt{2}}\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$x_2(t) = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - B\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0 \implies \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$
$$x_1(t=0) = 0 \quad x_2(t=0) = a \implies A = \frac{a}{2} \quad B = -\frac{a}{2}$$

D. For constructive interference the path length difference is a multiple of λ.

If L is the length of the cylinder, then for the smallest L we have λ=2(L/[2cos(10)] – L/2)

On the other hand λ=v/f, where v is the velocity in the medium and f is the frequency. Namely, λ=100/1000=0.1m, and so:

0.1=L (1/cos(10) – 1) and L=6.48 (as there are no calculators no need to give the final number)

Question 2:

2.(a) The Schrödinger equation is one-dimensional and we can take it to be independent of time (since the potential $V(x)$ is independent of time):

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) \quad .$$

The special conditions at the points $x = 0$ and $x = d$ (and actually at all points, but these are the points we need to check) are continuity of $\psi(x)$ and its derivative.
One can use the time independent equation as the potential is time independent.

(b) The solutions are exponentials $\exp(\pm ikx)$ (outside the barrier) or $\exp(\pm kx)$ (inside the barrier). Outside the barrier, the wave number is $k_1 = \sqrt{2mE}$ and inside the barrier it is $k_2 = \sqrt{2m(V-E)}$. We write

$$\begin{aligned}\psi(x) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad , \quad x \leq 0 \\ &= Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \quad , \quad 0 \leq x \leq d \\ &= Fe^{ik_1x} \quad , \quad d \leq x\end{aligned}$$

(C) see lecture notes.

The boundary conditions imply

$$A + B = C + D \quad ,$$

$$ik_1(A - B) = k_2(C - D) \quad ,$$

$$Fe^{ik_1 d} = Ce^{k_2 d} + De^{-k_2 d} \quad ,$$

$$ik_1 Fe^{ik_1 d} = k_2(Ce^{k_2 d} - De^{-k_2 d}) \quad .$$

From the boundary conditions at $x = 0$ we obtain

$$A = \frac{C}{2}\left(1 + \frac{k_2}{ik_1}\right) + \frac{D}{2}\left(1 - \frac{k_2}{ik_1}\right) \quad , \quad A = \frac{C}{2}\left(1 - \frac{k_2}{ik_1}\right) + \frac{D}{2}\left(1 + \frac{k_2}{ik_1}\right) \quad ,$$

and from the boundary conditions at $x = d$ we obtain

$$C = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{ik_1}{k21}\right) e^{ik_1 d - k_2 d} \quad , \quad D = \frac{F}{2}\left(1 - \frac{ik_1}{k21}\right) e^{ik_1 d - k_2 d} \quad .$$

Continuing to substitute for C and D in the equations above, we get

$$A = \frac{F}{4}\left(2 + i\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2}\right) e^{ik_1 d - k_2 d} + \frac{F}{4}\left(2 - i\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2}\right) e^{ik_1 d + k_2 d} \quad ,$$

and

$$B = \frac{F}{4}\left(i\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2}\right) e^{ik_1 d - k_2 d} - \frac{F}{4}\left(i\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2}\right) e^{ik_1 d + k_2 d} \quad .$$

Since this solution is not normalizable and the overall phase is not physically meaningful, we cannot solve for F; the magnitude and phase of F are arbitrary.

(D) As psi and psi' are continuous so are psi* and psi'*. Because we know that P(x)=psi*psi and P'(x)=psi*'psi+psi*psi', we have that P(x) and P'(x) are also continuous. As P(x=d) to the right of the barrier is a constant then P'(x=d)=0 to the right of the barrier, and because of the continuity P'(x=d) has to be zero also to the left of x=d. Such a zero derivative cannot be the result of a wave which goes only to the right inside the barrier as then P(x) inside the barrier would be exp(-2kx) and this function never has a zero derivative.

Question 3:

3.(a) It is relativistic contraction of length that relates S and L, namely $S = L/\gamma$, so $1-(v/c)^2 = \gamma^{-2} = (S/L)^2$ and therefore

$$v = \sqrt{1-(S/L)^2}\ \ c \quad .$$

(b) Using the formula for addition of velocities, we have the relative speed v_r between the train and the car equal to

$$v_r = \frac{2v}{1+(v/c)^2} \quad .$$

(c) If we define $\gamma_A = [1-(v_r/c)^2]^{-1/2}$ so that $L_A = L/\gamma_A$ is the length of the train in Alice's reference frame, then

$$\gamma_A = \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2} \quad ,$$

and

$$L_A = \frac{c^2-v^2}{c^2+v^2} L$$

is the length in Alice's reference frame.

(d) We use the inverse Lorentz transformation for Alice's (primed) variables, but since her speed is $-v$ relative to Bob, the relative signs are $-$:

$$\Delta t' = \gamma\Delta t - \gamma v \Delta x/c^2 = -\gamma(v/c^2)S = -vL/c^2 \quad ,$$
$$\Delta x' = \gamma\Delta x - \gamma v \Delta t = \gamma S = (L/S)S = L$$

For Alice, the distance between the events is larger than for Bob, even though the train is shorter for her than for Bob. But this distance is not the length of the train, because for Alice train moves between the two events. The sensors do not click simultaneously because, although for Alice the tunnel is shorter than it is for Bob, the train is even shorter than the tunnel. Thus the tail of the train passes the left end of the tunnel before the head of the train reaches the right end of the tunnel.

Question 4:

4A. (a) $\langle\psi|\psi\rangle = 1/6 + 1/2 + 1/3 = 1$.

(b) $\langle\hat{S}_z\rangle = (\hbar/2)1/6 + (\hbar/2)1/2 + (-\hbar/2)1/3 = \hbar/6$.

$\langle\hat{L}_z\rangle = (-\hbar)1/6 + (\hbar)1/2 + (\hbar)1/3 = 2\hbar/3$.

$\langle\hat{L}_z^2\rangle = \hbar^2$.

$\Delta L_z = (\langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle^2)^{1/2} = (\hbar^2 - 4\hbar^2/9)^{1/2} = \sqrt{5}\hbar/3$.

(c) In a magnetic field, degenerate states with different magnetic moments will not stay degenerate. The change in the energy is $-\mu B_z$ (with the magnetic field defining the z axis), and $\mu = (e/2m_e)(L_z + 2S_z)$. Computing $L_z + 2S_z$ for the three terms in $|\psi\rangle$, we get $-\hbar + 2 \cdot (\hbar/2) = 0$ for the first term, $\hbar + 2 \cdot (\hbar/2) = 2\hbar$ for the second term, and $\hbar + 2 \cdot (-\hbar/2) = 0$ for the third term, i.e. the magnetic moments corresponding to the first and third terms are the same, even though L_z and S_z are not the same. There is no change in the energy of the first and third terms, while the energy of the second term will change by $-\mu B_z = -eB_z\hbar/m_e$.

(d) Since there are two different magnetic moments in this superposition (0 and $e\hbar/m_e$), an incoming beam of boron atoms prepared in the state $|\psi\rangle$ will split into two beams in a Stern-Gerlach apparatus. We don't need to take into account the magnetic moments of the other four electrons, because anyway they cancel—two electrons have spin $S_z = \hbar/2$, two have spin $S_z = -\hbar/2$, and all have zero orbital angular momentum.